

Zahlensysteme, Rechnen mit Dualzahlen

Zahlensysteme

Jedes Zahlensystem besitzt eine bestimmte Anzahl unterscheidbarer Ziffern.

Der Platz, den diese Ziffern innerhalb einer Zahl einnehmen, bestimmt ihren Stellenwert.

Diese Stellenwerte werden gebildet aus den Potenzen zur Basis des jeweiligen Zahlensystems.

Jede Zahl stellt dann die Summe der Produkte der einzelnen Ziffern mit ihrem Stellenwert dar.

Die Anzahl der unterscheidbaren Ziffern in einem Zahlensystem ist gleich der Basis. Die höchste Ziffer eines Zahlensystems ist jedoch um eins kleiner als ihre Basis, da wir mit "Null" beginnen.

Anders ausgedrückt: Die Anzahl der erforderlichen Ziffern (einschließlich der "Null") ist gleich der Basis.

Zahlensysteme, für deren Stellenwerte Potenzen zu einer beliebig gewählten ganzzahligen Basis B verwendet werden, nennt man polyadisch. Der Zahlenwert ergibt sich auch hier immer als Summe der Produkte von Ziffern und Stellenwerten.

Besondere Bedeutung hat für uns das Dezimalsystem und das Dualsystem.

Der Vorteil bei der Anwendung des Dualsystems liegt darin, daß wir hier nur zwei unterschiedliche Ziffern verwenden. In der praktischen Anwendung (z.B. Datenverarbeitung) werden diese beiden Ziffern durch zwei sich entsprechende, sich aber gegenseitig ausschließende physikalische Größen dargestellt.

Beispiel:

Dezimalsystem: Grundzahl (Basis) 10

abgekürzte (und übliche) Schreibweise (z.B.): 3 507

ausführliche Schreibweise: $3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$

allgemeine Schreibweise: $a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$

für $a = 0 \dots 9$ (nur ganze Zahlen)

Dualsystem: Grundzahl (Basis) 2

abgekürzte Schreibweise (z.B.): LLOL (= der Dezimalzahl 13)

ausführliche Schreibweise: $L \cdot 2^3 + L \cdot 2^2 + 0 \cdot L^1 + L \cdot L^0$

allgemeine Schreibweise: $b_3 \cdot 2^3 + b_2 \cdot 2^2 + b_1 \cdot b^1 + b_0 \cdot b^0$

für b nur 0 und L zulässig

Darstellung der Zahlen 0 ... 20 in verschiedenen Zahlensystemen

<u>Dezimalzahl</u>	<u>Oktalzahl</u>	<u>Ternärzahl</u>	<u>Dualzahl</u>	bzw.:
0	0	0	0	0
1	1	1	1	L
2	2	2	10	LO
3	3	10	11	LL
4	4	11	100	LOO
5	5	12	101	LOL
6	6	20	110	usw.
7	7	21	111	
8	10	22	1000	
9	11	100	1001	
10	12	101	1010	
11	13	102	1011	
12	14	110	1100	
13	15	111	1101	
14	16	112	1110	
15	17	120	1111	
16	20	121	10000	
17	21	122	10001	
18	22	200	10010	
19	23	201	10011	
20	24	202	10100	

Beispiel:

Darstellung der Zahl 11 (Dezimalsystem) in anderen Zahlensystemen:

	in ausführlicher Schreibweise	in abgekürzter Schreibweise
im Dezimalsystem:	$11 = 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$	= 11
im Oktalsystem:	$13 = 1 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$	= 13
im Ternärsystem:	$102 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$	= 102
im Dualsystem:	$1011 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$	= 1011

Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Zahl eines anderen Zahlensystems

Die Umwandlung einer (ganzen) Dezimalzahl in eine Zahl eines anderen Zahlensystems erfolgt durch fortgesetztes Teilen der umzuwandelnden Dezimalzahl durch die Basis des neuen Zahlensystems.

Bei der Umwandlung von Ziffern, die rechts vom Komma stehen (Dezimalbrüche) wird die Division durch eine Multiplikation ersetzt.

Die bei der Teilung sich ergebenden "Reste" stellen Ziffern im anderen Zahlensystem dar.

Uns interessiert in diesem Zusammenhange nur die Umwandlung vom dezimalen ins duale Zahlensystem und umgekehrt. Daher soll hier auch nur auf diese eingegangen werden.

Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl

Die Umwandlung einer Dezimalzahl in eine Zahl eines anderen Zahlensystems erfolgt durch fortgesetzte Teilung durch die Basis des gewünschten Zahlensystems, also hier durch die 2.

Beispiel:

Gegeben ist die Dezimalzahl 53

Gesucht ist die entsprechende Zahl im Dualsystem

Lösung:

$$\begin{array}{rcl}
 53 : 2 = 26 & \text{Rest } 1 \\
 26 : 2 = 13 & \text{Rest } 0 \\
 13 : 2 = 6 & \text{Rest } 1 \\
 6 : 2 = 3 & \text{Rest } 0 \\
 3 : 2 = 1 & \text{Rest } 1 \\
 1 : 2 = 0 & \text{Rest } 1
 \end{array}$$

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
					1
				0	
			1		
		0			
	1				
1					
1	1	0	1	0	1

$$53 \quad \hat{=} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bzw.} \end{array} \right. \quad \begin{array}{cccccc} \text{L} & \text{L} & 0 & \text{L} & 0 & \text{L} \end{array}$$

(dezimal) (dual)

In ausführlicher Schreibweise:

$$53 \text{ (dezimal)} = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

Umwandlung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl

Wir haben gesehen:

Jede Zahl stellt die Summe der Produkte der einzelnen Ziffern mit ihrem Stellenwert dar.

Im dualen Zahlensystem gibt es nur die Ziffern "0" und "1" (bzw. "L").

Die Stellenwerte sind Potenzen zur Basis 2.

...	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	Potenz
...	256	128	64	32	16	8	4	2	1	Stellenwert

Die Ziffer "1" bzw. "0" sagt dann, ob dieser Stellenwert vorhanden ist oder nicht.

"1" bedeutet vorhanden, "0" nicht vorhanden.

Die einzelnen "vorhandenen" Werte sind dann zu addieren; wir erhalten so die gesuchte Dezimalzahl.

Beispiel:

Gegeben ist die Dualzahl LLOLOL

Gesucht ist die entsprechende Zahl im Dezimalsystem

Lösung:

L	L	0	L	0	L	Dualzahl
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	Potenz
32	16	8	4	2	1	Stellenwert
32	16	0	4	0	1	

$$32 + 16 + 4 + 1 = 53$$

$$\begin{array}{ccc} \text{LLOLOL} & \hat{=} & 53 \\ \text{dual} & & \text{dezimal} \end{array}$$

Die Umrechnung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl kann jedoch wesentlich einfacher erfolgen.

Hierbei beginnt man mit dem höchsten vorhandenen Stellenwert, also der 1 (L) an der linken Seite der Dualzahl. Man setzt den Wert "eins" ein. Nun rechnet man von links nach rechts; bei jeder Stelle mit einer "0" wird der vorhandene Wert verdoppelt, bei jeder "1" (L) verdoppelt und "eins" addiert.

Die sich bei der letzten Stelle rechts ergebende Zahl ist die gesuchte Dezimalzahl.

Beispiel:

Gegeben ist wieder die Dualzahl LLOLOL

Gesucht ist die entsprechende Zahl im Dezimalsystem

Lösung:

L	L	0	L	0	L
1	2 + 1	6	12 + 1	26	52 + 1
	= 3		= 13		= 53

LLOLOL $\hat{=}$ 53
dual dezimal

Rechnen mit Dualzahlen

Addition

Rechenregeln im dualen Zahlensystem

bei zwei Summanden (Halbaddierer)

$$\begin{aligned}0 + 0 &= 0 \\L + 0 &= L \\0 + L &= L \\L + L &= LO\end{aligned}$$

bei drei Summanden (Volladdierer)

$$\begin{aligned}0 + 0 + 0 &= 0 \\L + 0 + 0 &= L \\0 + L + 0 &= L \\0 + 0 + L &= L \\L + L + 0 &= LO \\L + 0 + L &= LO \\0 + L + L &= LO \\L + L + L &= LL\end{aligned}$$

Beispiel:

dual	dezimal	dual	dezimal
LLOLO	$\hat{=}$ 26	LOOL	$\hat{=}$ 9
+ LLOLO	$\hat{=}$ 29	LOLLO	$\hat{=}$ 22
LLOLLL	$\hat{=}$ 55	+ LOLO	$\hat{=}$ 10
		LOLOOL	$\hat{=}$ 41

Subtraktion

Im Dualsystem kann die Subtraktion wie im Dezimalsystem durch Aufaddieren erfolgen.

Rechner können jedoch nur reine Additionen durchführen.

Jede Subtraktion muß daher in eine Addition umgewandelt werden; man erhält dann eine "Komplementär-Addition".

Zum besseren Verständnis soll dieser Vorgang zuerst an einem Beispiel im Dezimalsystem gezeigt werden.

Beispiel:

Aufgabe: 57 - 14

Lösung: (bei einem Rechner mit vier Stellen)

$$57 + (-14) = 57 + (10\,000 - 14) - 10\,000$$

$$57 + (\underbrace{9999 - 14 + 1}_A) - \underbrace{10\,000}_B$$

A = Komplement zur höchsten Ziffer des verwendeten Zahlensystems, im Dezimalsystem also zur "9".

Komplement zur Zahl 14 im Dezimalsystem: 9985
hierzu "plus eins" = 9986

B dieser Wert erscheint im Ergebnis nicht, da der Rechner (in unserem Falle) nur vier Stellen anzeigt; entsprechendes gilt für Rechner mit anderen Stellenzahlen.

Beispiel gerechnet durch Komplementär-Addition

0057	0057	
- 0014	+ 9985	Komplement zu "9"
??	(1)0042	
	1	+ 1
entfällt	0043	

Die gleiche Aufgabe vereinfacht gerechnet:

$$\begin{array}{r} 57 \\ - 14 \\ \hline ?? \\ \text{entfällt} \end{array} \quad \begin{array}{r} 57 \\ + 85 \text{ Komplement zu "9"} \\ \hline (1)42 \\ \quad 1 + 1 \\ \hline 43 \end{array}$$

Die Subtraktion im dualen Zahlensystem wird recht einfach.

Die höchste Ziffer in diesem Zahlensystem ist die "1".

Bei der Komplementbildung zu 1 wird aus

1: 0 und aus

0: 1

Jeder Wert wird also negiert.

Nach der Komplementäraddition muß zu dem erhaltenen Zwischenergebnis noch "+1" addiert werden.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} LOOL \\ - LOL \\ \hline ???? \end{array} \quad \begin{array}{r} LOOL \\ + LOLO \text{ negiert (Komplement zu "1" bzw. "L")} \\ \hline (L)OOLL \\ \quad L + 1 (L) \\ \hline LOO \end{array}$$

Multiplikation

Rechenregeln im dualen Zahlensystem

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$L \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot L = 0$$

$$L \cdot L = L$$

Nach diesen Rechenregeln werden die beiden Faktoren miteinander multipliziert. Die Summe der Produkte ist das Ergebnis im dualen Zahlensystem.

Beispiel:

dual		dezimal
<u>LLOL · LOL</u>	$\hat{=}$	<u>13 · 5</u>
LLOL		15
0000		+ 5
+ LLOL		65
100000L	$\hat{=}$	65

dual		dezimal
<u>LL00 · L0LLL</u>	$\hat{=}$	<u>12 · 23</u>
LL00		36
LL00		+ 24
LL00		276
0000		
+ LL00		
10000L00	$\hat{=}$	276

Division

Auf die Division im dualen Zahlensystem wird hier nicht eingegangen, da sie für uns in diesen Zusammenhang nicht von Bedeutung ist.

Sie erfolgt durch fortwährende Subtraktion (Komplementäraddition).