Rechen-lehre

Rechnen
Raumlehre
Sortenverwandlung

Übungsaufgaben
Angewandte Aufgaben
Lösungsheft

Rechenlehre

Rechnen - Raumlehre
Sortenverwandlung

Übungsaufgaben
Angewandte Aufgaben
Lösungsheft

12., verbesserte und erweiterte Auflage

Deutsche Postgewerkschaft — Hauptvorstand — Verlag
6 Frankfurt 71 — Rhonestraße 2

Inhaltsverzeichnis

Hinweis

Der Band „Rechenlehre" wird durch ein Lösungsheft ergänzt, das die Lösungen der gestellten Übungsaufgaben und angewandten Aufgaben enthält.

Vorwort

Diese „Rechenlehre" soll jedem, der sich beruflich weiterbilden oder auf eine Eignungsfeststellung bzw. auf eine Fachprüfung vorbereiten will, die Möglichkeit geben, seine Rechenkenntnisse wieder aufzufrischen und zu vertiefen. Das Buch will außerdem dem Fortgeschrittenen eine wertvolle Hilfe bei der Vervollkommnung seiner mathematischen Kenntnisse sein.

Der vorliegende Band ist so aufgebaut, daß er sowohl als Lehrbuch für den Unterricht, als Grundlage für einen Fernlehrgang und auch für den Selbstunterricht benutzt werden kann. Er umfaßt im einzelnen folgende Abschnitte:

Rechnen	Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen, Zehnerbrüchen und gewöhnlichen Brüchen
	die Verwandlung von Maßen, Gewichten und Münzen
	die Dreisatzrechnung
	die Prozent- und Zinsrechnung
	Aufgaben aus dem bürgerlichen Rechnen
Raumlehre	Flächen- und Körperberechnung

Für den Selbstunterricht ist das Buch besonders geeignet, da es die einzelnen Rechenarten klar, anschaulich und ausführlich behandelt und allgemeinverständlich erläutert. Eine große Zahl von Übungsaufgaben und angewandten Aufgaben ermöglicht es dem Leser, selbst festzustellen, inwieweit er die betreffende Rechnungsart verstanden hat. Die „Rechenlehre" wird durch ein Lösungsheft ergänzt, das die Lösungen zu den im Lehrbuch gestellten Aufgaben enthält.

Druck: Herbst 1971

DAS RECHNEN

1. Allgemeines

Wir rechnen nach dem **Zehnersystem**, d. h. nach einem Zahlensystem, bei dem sich alles auf die **Zahl 10** bezieht.
Man nennt diesen Zahlenaufbau auch **dekadisches Zahlensystem** (deka = 10fach).

Die Stellenwerte unserer Zahlen lauten von rechts nach links:

Einer (E), Zehner (Z), Hunderter (H), Tausender (T), Zehntausender (Zt), Hunderttausender (Ht), Millionen (M).

Über 1 Million hinaus gibt es noch:
10 Millionen
100 Millionen
1 000 Millionen = 1 Milliarde
10 Milliarden
100 Milliarden
1 000 Milliarden = 1 Billion
und weiter: 1 000 Billionen = 1 Billiarde
1 000 Billiarden = 1 Trillion
1 000 Trillionen = 1 Trilliarde usw.

Diese großen Zahlen über Milliarden hinaus nennt man **astronomische Zahlen;** sie kommen im bürgerlichen Rechnen nicht vor.

10 Einheiten der niederen Ordnung bilden im Zehnersystem
1 Einheit der höheren Ordnung;

demnach sind
10 Einer = 1 Zehner
10 Zehner = 1 Hunderter
10 Hunderter = 1 Tausender
10 Tausender = 1 Zehntausender usw.

Wir unterscheiden Ziffern und Zahlen.

Ziffern sind die Zeichen für die Zahlen **0 bis 9.**

Zahlen setzen sich aus Ziffern zusammen (z. B. 6 453 — 48,25).

Es gibt also unendlich **viele Zahlen,** aber nur **zehn Ziffern.**

Bei den Ziffern unterscheiden wir:

arabische Ziffern (1, 2, 3, 4, 5 usw.) und
römische Ziffern (I, II, III, IV, V) usw.

1.1. Die Schreibweise vielstelliger Zahlen

Ganze Zahlen mit mehr als vier Stellen werden **von rechts nach links** durch kleine Zwischenräume (nicht durch Punkte!) **in Dreiergruppen** aufgeteilt:

also: **4 368 795** (nicht: 4368795 und nicht: 4.368.795).

Diese Schreibweise erhöht die Übersichtlichkeit und erleichtert das richtige Lesen der Zahlen.

Bei Dezimalzahlen werden die **Dezimalstellen nach dem Komma nicht in Dreiergruppen** aufgeteilt (z. B. 27,589214 — 1 418 206,312493).

Bei Dezimalzahlen werden die Dezimalstellen (die Brüche) von den ganzen Zahlen durch **ein Komma** (nicht durch einen Punkt) getrennt (z. B. 36,25 DM).

Volle Markbeträge schreiben wir so nieder: 6 DM oder 6,00 DM oder 6,— DM.

Die Zahlen werden eingeteilt in

1. ganze Zahlen:	316	495	24 519
2. Brüche, und zwar			
a) Dezimalbrüche:	0,75	3,68	12,346
b) gewöhnliche Brüche:	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
3. unbenannte Zahlen:	367	1 456	27 495
4. benannte Zahlen:	8,25 DM	36,28 m	45,368 kg

Bei den **benannten Zahlen** unterscheiden wir
benannte Zahlen mit **gleicher Benennung:**

3 465 DM   478 DM   5 436 DM   298 DM und

benannte Zahlen mit **ungleicher Benennung:**

8,65 m   75 cm   467 mm   385 km

Bei den **benannten Zahlen** bedeuten:

deka = 10fach	**hekto** = 100fach	**kilo** = 1 000fach
dezi = $\frac{1}{10}$	**zenti** = $\frac{1}{100}$	**milli** = $\frac{1}{1\,000}$

Also: 1 Dekameter = 10 m   1 Hektoliter = 100 l   1 Kilogramm = 1 000 g

1 Dezimeter = $\frac{1}{10}$ m   1 Zentiliter = $\frac{1}{100}$ l   1 Milligramm = $\frac{1}{1\,000}$ g

2. Römische Zahlen

Unsere Zahlen schreiben wir heute meist **in arabischen Ziffern:** 1, 2, 3, 4, 5 usw. Die arabischen Ziffern lernten die Europäer durch die Araber kennen, die sie gegen Ende des 9. Jahrhunderts von den Indern übernahmen.

Die alten Römer verwendeten sieben Zahlzeichen (Buchstaben), aus denen die **römischen Zahlen** zusammengestellt wurden.

An Bauwerken, alten Stadttoren usw. finden wir häufig das Baujahr in römischen Zahlen angegeben,
z. B. „A. D. MCDLVI", d. h. Anno domini (im Jahre des Herrn) 1456.

Auch die Dienstanweisungen der DBP sind zum Teil mit römischen Zahlen bezeichnet, z. B. ADA V, 1; VIII, 1; VI, 3 A usw.

2.1. Die Schreibweise der römischen Zahlen

Man schreibt **römische Zahlen** mit **Buchstaben:**

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1 000

Aus diesen sieben Zahlzeichen lassen sich Zahlen beliebig zusammenstellen.

Es bedeuten:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXX	XL	L	LX	LXX	LXXX	XC
16	17	18	19	20	30	40	50	60	70	80	90

C	CC	CCC	CD	D	DC	DCC	DCCC	CM	M
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1 000

Beachten Sie folgende Leitsätze:

1. **Nebeneinandergestellte Zahlzeichen von gleichem Wert werden zusammengezählt:**

   III = 3; XX = 20; CCC = 300;

2. **Kleinere Zahlen rechts neben einer größeren werden zugezählt:**

   VI = 5 + 1 = 6; XV = 10 + 5 = 15; LX = 50 + 10 = 60;
   CX = 100 + 10 = 110;

3. **Kleinere Zahlen links neben einer größeren werden abgezogen:**

   IV = 5 — 1 = 4; XL = 50 — 10 = 40; IC = 100 — 1 = 99;
   CM = 1 000 — 100 = 900;

4. **Links von der größeren Zahl darf nur eine kleinere Zahl stehen:**

   nicht: IIXX (18), sondern: XVIII;

5. **Mehr als drei gleiche Zahlwerte dürfen nicht aufeinander folgen:**

   nicht: VIIII (9), sondern: IX nicht: CCCC (400), sondern: CD

6. **Bei doppeldeutigen Zahlen verwendet man die kleinere Form:**

   nicht: XCIX (100 — 10 + 9 = 99), sondern: IC (100 — 1 = 99).

Beispiele: DCCLXVIII = 768 MCDXCII = 1492 MCMLXII = 1962

Übungsaufgabe 1

Schreiben Sie folgende Jahreszahlen als römische Zahlen!

864 — 1273 — 1648 — 1787 — 1871 — 1999

3. Ganze Zahlen und Brüche

Man unterscheidet ganze Zahlen, Dezimalbrüche und gewöhnliche Brüche.

3.1. Ganze Zahlen

Der Wert einer Ziffer ist abhängig von der Stelle, an der sie innerhalb einer Zahl steht; wir nennen diesen Wert **Stellenwert.**

Stellenwerte der ganzen Zahlen

Millionen	Hundert-tausender	Zehn-tausender	Ein-tausender	Hunderter	Zehner	Einer
7. Stelle	6. Stelle	5. Stelle	4. Stelle	3. Stelle	2. Stelle	1. Stelle

Wir zerlegen in Stellenwerte:

24 = 4 Einer, 2 Zehner
436 = 6 Einer, 3 Zehner, 4 Hunderter
2 405 328 = 8 Einer, 2 Zehner, 3 Hunderter, 5 Eintausender,
0 Zehntausender, 4 Hunderttausender, 2 Millionen.

Lesen Sie folgende Zahlen und geben Sie ihren Stellenwert an!

5 364   967 085   18 960 473
6 204 086 004   638 007 340 901   23 406 023 198 503

Übungsaufgabe 2

Schreiben Sie folgende Zahlen mit Ziffern nieder!

siebentausendfünf — dreiundvierzigtausendsiebzehn — vierhundertzweitausend-neunhundertacht — acht Millionen neuntausendfünfzig — vierzig Millionen achthundertsiebentausendvierunddreißig.

3.2. Dezimalbrüche und gewöhnliche Brüche

Im täglichen Leben rechnen wir nicht nur mit ganzen Zahlen, sondern auch mit Teilen von ganzen Zahlen, mit **Brüchen.**

Die Brüche können **Dezimalbrüche (Zehnerbrüche)** oder **gewöhnliche Brüche** sein.

3.2.1. Dezimalbrüche

Dezimalbrüche sind Brüche, deren Nenner durch eine 10, 100, 1 000 usw. gebildet werden und ein **Komma** (nicht einen Punkt!) enthalten.

1,1   2,03   4,005

Links vom Komma stehen **die Ganzen, rechts** die Teile der Ganzen, **die Brüche.**

Der Zähler des Dezimalbruches kann **jede beliebige Zahl** sein.

Der Nenner wird nicht niedergeschrieben, sondern durch die **Anzahl der Stellen rechts vom Komma** bezeichnet.

Beim Lesen eines Dezimalbruches (3,75) lesen wir zuerst die **Ganzen** links vom Komma (3), dann die Zahl rechts vom Komma als **Zähler** (75), zum Schluß gibt die Anzahl der Stellen hinter dem Komma den **Nenner** des Dezimalbruches (Hundertstel) an;

also: 3,75 = drei, fünfundsiebzig Hundertstel.

Wir können den Dezimalbruch 3,75 auch lesen: **drei Komma sieben fünf.**

So wie die ganzen Zahlen werden auch die Dezimalbrüche nach dem **Zehnersystem** geordnet.

Stellenwerte der Zehnerbrüche

Komma

Einer	Zehntel	Hundertstel	Ein-tausendstel	Zehn-tausendstel	Hundert-tausendstel	Millionstel
1. Stelle	1. Stelle	2. Stelle	3. Stelle	4. Stelle	5. Stelle	6. Stelle
←	→					

Wir zerlegen in Stellenwerte:

0,36 = 0 Einer, 3 Zehntel, 6 Hundertstel
2,458 = 2 Einer, 4 Zehntel, 5 Hundertstel, 8 Eintausendstel
9,375186 = 9 Einer, 3 Zehntel, 7 Hundertstel, 5 Eintausendstel,
1 Zehntausendstel, 8 Hunderttausendstel, 6 Millionstel

Fehlt bei Dezimalzahlen ein Stellenwert
(z. B. die Zehntel-Stelle bei 27,06 DM),
so wird an dessen Stelle eine 0 gesetzt.

Fehlen die Ganzen
(z. B. 0,58 DM),
so setzt man an deren Stelle ebenfalls eine 0.

Lesen Sie folgende Dezimalzahlen und geben Sie die Stellenwerte an!

0,3	0,45	2,304	3,7025
5,00346	8,005904	6,008007	0,000003

Übungsaufgabe 3

Schreiben Sie folgende Zahlen mit Ziffern nieder!

4 Zehntel — 25 Hundertstel — 604 Eintausendstel — 23 Eintausendstel — 465 Zehntausendstel — 627 Hunderttausendstel — 9 Millionstel.

3.2.1.1. Das Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen der Dezimalbrüche

Das Erweitern:

0,4 km = 0,40 km = 0,400 km = 0,4000 km usw.

Regel:

Man erweitert einen Dezimalbruch, indem man Nullen anhängt. Der Wert des Bruches ändert sich durch das Erweitern nicht.

Das Kürzen:

0,4000 km = 0,400 km = 0,40 km = 0,4 km

Regel:

Man kürzt einen Dezimalbruch, indem man Nullen abstreicht. Der Wert des Bruches ändert sich durch das Kürzen nicht.

Das Gleichnamigmachen:

3,4 km + 4,25 km + 5,376 km = 3,400 km + 4,250 km + 5,376 km

Regel:

Man macht Dezimalbrüche gleichnamig, indem man ihnen als Nenner die gleiche Anzahl der Stellen hinter dem Komma gibt.

3.2.1.2. Das Auf- und Abrunden der Dezimalbrüche

Das Aufrunden:

4,6753 = 4,68　　　8,38264 = 8,383

Im ersten Beispiel ist die erste weggelassene Ziffer eine 5, im zweiten eine 6; im ersten Beispiel wurde aus der 7 eine 8, im zweiten aus der 2 eine 3.

Merken Sie:

Ist die erste weggelassene Ziffer eine 5, 6, 7, 8 oder 9, so wird die vorhergehende um 1 erhöht.

Das Abrunden:

4,6735 = 4,67　　　8,38627 = 8,386

Im ersten Beispiel ist die erste weggelassene Ziffer eine 3, im zweiten eine 2; die 7 und die 6 bleiben unverändert.

Merken Sie:

Ist die erste weggelassene Ziffer eine 0, 1, 2, 3 oder 4, so wird die vorhergehende nicht erhöht.

3.2.1.3. Das Auf- oder Abrunden von Ergebnissen

Beim Rechnen werden **Ergebnisse mit vielstelligen Dezimalbrüchen auf- oder abgerundet**, und zwar:

DM-Beträge und Maße mit der Verwandlungszahl 100 auf 2 Stellen:

16,75 DM　　6,15 m　　5,36 qm　　2,98 hl

Maße und Gewichte mit der Verwandlungszahl 1 000 auf 3 Stellen:

23,465 km　　14,375 kg　　2,545 cbm　　3,547 t

Übungsaufgabe 4

a) Runden Sie auf 2 Stellen ab oder auf!

7,368 DM	8,063 hl	3,406 ha	6,123 m²
5,632 DM	4,709 hl	1,762 ha	9,407 m²

b) Runden Sie auf 3 Stellen ab oder auf!

3,4475 kg	7,20433 km	5,743806 m²	2,164237 t
8,4132 kg	6,04216 km	4,068315 m²	9,237906 t

3.2.2. Gewöhnliche Brüche

Gewöhnliche Brüche sind Zahlenteile, die einen **Bruchstrich** haben:

$$\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{4}$$

Sie bestehen aus 3 Teilen, aus einem **Zähler**, einem **Bruchstrich** und einem **Nenner:**

$$\frac{1}{2} = 1:2 \qquad \frac{2}{3} = 2:3 \qquad \frac{3}{4} = 3:4$$

Der **Bruchstrich** ist für das **Teilungszeichen (:)** gesetzt und bedeutet ebenfalls: **geteilt durch.**

Die Zahl, die über dem Bruchstrich steht, heißt **Zähler,**
die Zahl, die unter dem Bruchstrich steht, heißt **Nenner.**

Merken Sie:

Der Zähler steht über dem Bruchstrich und zählt die Bruchteile, der Nenner steht unter dem Bruchstrich und benennt die Brüche.

3.2.2.1. Arten der gewöhnlichen Brüche

Man unterscheidet:

Scheinbrüche: sie sind nur **scheinbar Brüche** und haben den **Wert von Ganzen;**	$\frac{2}{2} = 1$	$\frac{3}{3} = 1$	$\frac{8}{4} = 2$
Stammbrüche: der Zähler ist **immer 1;**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
echte Brüche: ihr Wert ist **kleiner als ein Ganzes;**	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$
unechte Brüche: ihr Wert ist **größer als ein Ganzes;**	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{7}{4}$
gleichnamige Brüche; sie haben den **gleichen Nenner;**	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$
ungleichnamige Brüche: sie haben **ungleiche Nenner;**	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$
gemischte Zahlen: sie bestehen aus **Ganzen und Brüchen.**	$4\frac{2}{3}$	$6\frac{5}{7}$	$9\frac{7}{12}$

4. Die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen (Zehnerbrüchen)

4.1. Das Zuzählen oder Addieren (Die Addition)

$$\begin{array}{r} 2\,384 \\ +\ 1\,476 \\ \hline 3\,860 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{Posten} \\ +\ \text{Posten} \\ \hline =\ \text{Summe} \\ \hline\hline \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{r} \text{Summand} \\ +\ \text{Summand} \\ \hline =\ \text{Summe} \\ \hline\hline \end{array}$$

Zahlen, die addiert werden sollen, nennt man **Posten** oder **Summanden.**

Das Ergebnis bezeichnet man mit **Summe.**

Das Zeichen für die Addition ist das **Pluszeichen (+).**

$9 + 6 + 5 = \mathbf{20}$ $\qquad 6 + 5 + 9 = \mathbf{20}$ $\qquad 5 + 6 + 9 = \mathbf{20}$

Merken Sie:

Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

4.1.1. Das Addieren von ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen

Beispiele:

$$\begin{array}{r} 35\,982 \\ 6\,409 \\ 346 \\ 5\,021 \\ 46\,564 \\ 7\,328 \\ \hline 101\,650 \\ \hline\hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15{,}64 \text{ DM} \\ 8{,}27 \text{ DM} \\ 34{,}06 \text{ DM} \\ 7{,}63 \text{ DM} \\ 24{,}18 \text{ DM} \\ 17{,}32 \text{ DM} \\ \hline 107{,}10 \text{ DM} \\ \hline\hline \end{array}$$

Schreiben Sie **deutliche Ziffern!**

Schreiben Sie die **Zahlen genau untereinander!**
Einer unter Einer usw.
Zehntel unter Zehntel usw.
Komma unter Komma!

Bilden Sie **Zahlengruppen zu je drei Stellen!**
23 456 — 468 395 — 6 235 748.

4.1.1.1. Das Addieren von ganzen Zahlen

Erklärung des 1. Beispiels:

Wir addieren von unten nach oben zuerst die Einer:

$8 + 4 + 1 + 6 + 9 + 2 = 30$ Einer (3 Z, 0 E).

Die 0 Einer schreiben wir als Ergebnis unter die Einerreihe; die 3 Zehner merken wir bei den Zehnern vor und addieren:

$3 + 2 + 6 + 2 + 4 + 0 + 8 = 25$ Zehner (2 H, 5 Z).

Die 5 Zehner schreiben wir als Ergebnis unter die Zehnerreihe; die 2 Hunderter merken wir bei den Hundertern vor und addieren:

$2 + 3 + 5 + 0 + 3 + 4 + 9 = 26$ Hunderter (2 T, 6 H).

Das Addieren der Tausender usw. geschieht dann in gleicher Weise, bis das Ergebnis 101 650 feststeht.

4.1.1.2. Das Addieren von Dezimalbrüchen

Erklärung des 2. Beispiels:

Dezimalbrüche werden **wie ganze Zahlen** addiert.

Wir schreiben die Dezimalbrüche richtig untereinander:

Komma unter Komma!

Wir addieren in der gleichen Weise wie bei ganzen Zahlen:
zuerst die Hundertstel, dann die Zehntel, die Einer und die Zehner, bis das Ergebnis 107,10 DM feststeht.

Merken Sie:

Beim Addieren von Dezimalbrüchen muß auch im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

4.1.2. Die Längs- und die Queraddition

Wir unterscheiden eine **Längs- und** eine **Queraddition.**

Bei der **Längsaddition** stehen die **Posten untereinander,**
bei der **Queraddition** stehen sie **nebeneinander.**

Probe einer Längs- und Queraddition:

					Summe
	6 436	5 084	2 384	4 560	**18 464**
	2 027	1 203	4 506	3 025	**10 761**
	4 308	3 475	1 087	2 406	**11 276**
	3 570	2 860	3 450	5 870	**15 750**
	5 683	3 027	5 879	2 346	**16 935**
Summe:	22 024	15 649	17 306	18 207	73 186

Erklärung:

Wir errechnen zuerst die vier **Längssummen.**

Dann errechnen wir die fünf **Quersummen.**

Zum Schluß addieren wir die **Längs- und die Quersummen.**

Merken Sie:

Die Summe der Längsadditionen ist gleich der Summe der Queradditionen.

4.1.3. Das Rechnen mit Rechenvorteilen

Beim Addieren fassen wir zwei oder mehrere Zahlen zu **„Zehnerpäckchen"** zusammen:

$$3 + 4 + 6 + 5 + 8 + 4 + 2 + 9 + 6 + 3 + 1 + 7 = \mathbf{58}$$

$$4 + 6 = \mathbf{10} \qquad 8 + 2 = \mathbf{10} \qquad 6 + 3 + 1 = \mathbf{10}$$

Wir rechnen nun:

$$3 + 10 + 5 + 10 + 4 + 9 + 10 + 7 = \mathbf{58}$$

Fassen Sie ebenso **bei senkrechten Additionen zu „Zehnerpäckchen"** zusammen!

4.1.4. Rechenproben beim Addieren

Um festzustellen, ob wir auch richtig gerechnet haben, machen wir **beim schriftlichen Rechnen** stets eine **Probe.**

4.1.4.1. Die Additionsprobe

Bei Längsadditionen rechnen wir einmal **von unten nach oben** und einmal in umgekehrter Richtung **von oben nach unten.** Kommen wir dabei zu demselben Ergebnis, so dürfen wir annehmen, daß das Ergebnis richtig ist.

4.1.4.2. Die Stellenwertprobe

3 486			
2 705	Summe der Einer	=	28
4 673	Summe der Zehner	=	30
5 879	Summe der Hunderter	=	26
6 185	Summe der Tausender	=	20
22 928			22 928

Erklärung der Stellenwertprobe:

Wir schreiben die **Summen** der Einer, Zehner, Hunderter und Tausender in der vorstehenden Form **untereinander** und **addieren** die Summen. Wir müssen dann zu demselben Ergebnis kommen wie bei der üblichen Addition.

4.1.5. Das Addieren von benannten Zahlen mit gleicher Benennung

Benannte Zahlen mit gleicher Benennung werden nach der Regel:

Komma, unter Komma! **Benennung unter Benennung!**

untereinandergeschrieben und addiert.

Übungsaufgabe 5

Setzen Sie die waagerechten Zahlenreihen untereinander und addieren Sie!

a) 2 364 DM + 725 DM + 1 043 DM + 64 DM + 308 DM + 2 370 DM =

b) 3 207 m + 1 025 m + 673 m + 2 008 m + 75 m + 840 m =

c) 125 hl + 2 207 hl + 42 hl + 1 064 hl + 980 hl + 5 hl =

d) 84,5 qm + 126,4 qm + 40,7 qm + 3,8 qm + 205,1 qm + 23 qm =

e) 384,20 DM + 76,45 DM + 3,92 DM + 406,30 DM + 17,03 DM =

f) 234,376 km + 75,083 km + 104,309 km + 16,003 km + 317,385 km =

4.1.6. Das Addieren von benannten Zahlen mit ungleicher Benennung

Benannte Zahlen mit ungleicher Benennung kann man erst addieren, wenn man die **ungleichen Benennungen** in **gleiche Benennungen** umgewandelt hat.
Dieses Umwandeln von Sorten nennt man **Sortenverwandlung.** (Siehe Seite 60)

Angewandte Aufgaben

6. Bei einem Postamt betragen die Postspareinlagen:

an Schalter I	3 046,60 DM,	an Schalter II	2 940,07 DM,
an Schalter III	2 970,23 DM,	an Schalter IV	3 008,40 DM.

Wie hoch ist die Summe der Spareinlagen?

7. Vier versiegelte Wertpakete wiegen 12,300 kg, 14,675 kg, 8,750 kg und 6,800 kg. Wieviel beträgt das Gesamtgewicht?

8. Ein Bote liefert am Postschalter ein:
3 Postanweisungen zu 18,75 DM, 56,20 DM und 124,65 DM und
4 Zahlkarten zu 9,45 DM, 44,80 DM, 83,75 DM und 576,40 DM.
Die Gebühren betragen: 0,80; 1,00; 1,40; 0,30; 0,40; 0,50 und 0,50 DM.
Wie hoch ist der Gesamtbetrag?

9. Ein Bauerngut hat 0,95 ha Gartenland, 420,50 ha Ackerland, 558 ha Wiese, 305,25 ha Wald und 23,50 ha Heide. Wie groß ist das Gut?

10. Laut Frachtbrief wiegen 6 Kisten: 23,450 kg, 28,675 kg, 18,400 kg, 32,600 kg, 26,750 kg, 23,875 kg. Berechnen Sie das Gesamtgewicht!

11. Die Tageseinnahmen eines Kaufmanns betragen: 973,68 DM, 1 038,69 DM, 894,12 DM, 852,48 DM, 956,37 DM, 1 069,20 DM. Wie groß ist die Wocheneinnahme?

12. Eine Großhandlung liefert an ein Feinkostgeschäft für 568,70 DM Kolonialwaren, für 674,25 DM Konserven, für 363,35 DM Fleisch- und Wurstwaren, für 195,20 DM Butter und Käse und für 282,95 DM Delikatessen. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?

13. Für die Erweiterung eines Gebäudes wurden in Rechnung gestellt für:

Erdarbeiten	5 704,50 DM	den Maurer	62 077,50 DM
den Zimmerer	23 542,50 DM	den Dachdecker	7 506,80 DM
den Schlosser	6 751,70 DM	den Schreiner	12 630,50 DM
den Klempner	4 030,80 DM	den Anstreicher	6 703,80 DM
den Elektriker	4 750,00 DM	Verschiedenes	19 035,00 DM

Wieviel betragen die Gesamtkosten?

14. Bei einer Vermögensaufstellung erscheinen folgende Vermögensteile: Kassenbestand 3 407,35 DM, Warenbestand 125 008,75 DM, Bankguthaben 37 560,40 DM, Außenstände 14 239,65 DM, Wertpapiere 46 349,00 DM, Wechsel 12 304,25 DM. Errechnen Sie die Gesamtsumme!

15. Jemand kauft ein: 1 Oberhemd 22,90 DM, 2 Sporthemden zu je 18,90 DM, 3 Garnituren Unterwäsche zu je 12,25 DM, 2 Paar Strümpfe zu je 9,20 DM, 4 Paar Socken zu je 6,65 DM, 1 Binder 9,75 DM. Stellen Sie den Kassenzettel aus!

4.2. Das Abziehen oder Subtrahieren (Die Subtraktion)

3 860	**Minuend**
— 1 476	**— Subtrahend**
2 384	**= Differenz**

Die Zahl, von der eine andere Zahl subtrahiert wird, nennt man **Minuend.**

Die Zahl, die subtrahiert wird, heißt **Subtrahend.**

Das Ergebnis bezeichnet man mit **Differenz.**

Das Zeichen für das Subtrahieren ist das **Minuszeichen (—).**

Beispiele:

6 375	87,54 DM	Schreiben Sie **deutliche Ziffern!**
— 2 156	— 38,87 DM	Schreiben Sie die **Zahlen genau untereinander!**
4 219	48,67 DM	Einer unter Einer usw.
		Zehntel unter Zehntel usw.
		Komma unter Komma!

Bilden Sie **Zahlengruppen zu je drei Stellen!**
56 324 — 723,568 — 8 745,305268

4.2.1. Das Ergänzungsverfahren

Beim **Subtrahieren** wird heute das sogenannte **Ergänzungsverfahren** bevorzugt.

Begründung:

Das Addieren von Zahlen ist leichter als das Subtrahieren.
Beim Ergänzungsverfahren braucht man keine Zahlenwerte zu leihen.
Man kann gleichzeitig mehrere Zahlen subtrahieren.

8	Man rechnet nicht mehr 8 — 6 = 2, sondern 6 + 2 = 8;
— 6	die **Ergänzungszahl** 2 wird dabei als **Ergebnis** niedergeschrieben.
2	

Merken Sie:

Das Ergänzungsverfahren ist eine Umkehrung der Subtraktion.
Differenz + Subtrahend = Minuend

4.2.1.1. Ergänzen ohne Überschreiten der Zehner

Beispiel:	Rechnen Sie:	
85,98	6 + 2 = 8	Die **Ergänzungszahlen** 2, 4, 3, 5 werden als **Ergebnis (Differenz)** niedergeschrieben.
— 32,56	5 + 4 = 9	
53,42	2 + 3 = 5	
	3 + 5 = 8	

4.2.1.2. Ergänzen mit Überschreiten der Zehner

Beispiel:	Rechnen Sie:		
63,24		5 + 9 = 14	Die **Ergänzungszahlen** 9, 3, 6, 2 werden **als Ergebnis (Differenz)** niedergeschrieben. Die **Zehner** werden wie beim Addieren der nächsten Einheit des **Subtrahenden** zugezählt (aus 8, 6 und 3 werden also 9, 7 und 4).
— 36,85	1 + 8 = 9	9 + 3 = 12	
26,39	1 + 6 = 7	7 + 6 = 13	
	1 + 3 = 4	4 + 2 = 6	

4.2.1.3. Die größere Zahl steht unter der kleineren Zahl

Beispiel: **Aufgabe:** 68,43 — 24,76 = 43,67

	Rechnen Sie:		
— 24,76		6 + 7 = 13	Ein **Umstellen** der Zahlen ist beim Ergänzungsverfahren **nicht erforderlich.**
68,43	1 + 7 = 8	8 + 6 = 14	
43,67	1 + 4 = 5	5 + 3 = 8	
		2 + 4 = 6	

4.2.1.4. Gleichzeitiges Abziehen mehrerer Subtrahenden

Beispiel:	Rechnen Sie:	
485,95	4, 10, 18, 21 + 4 = 25	Die einzelnen Reihen der **Subtrahenden** werden **addiert** und dann **ergänzt.** Die **Ergänzungszahlen 4, 1, 3, 0, 2** werden wieder als **Ergebnis** niedergeschrieben.
— 64,23	2, 3, 6, 8, + 1 = 9	
— 86,38	7, 12, 18, 22 + 3 = 25	
— 75,16	2, 7, 14, 22, 28 + 0 = 28	
— 57,04	2 + 2 = 4	
203,14		

Merken Sie:

Beim Subtrahieren von Dezimalbrüchen muß auch im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

4.2.1.5. Rechenprobe beim Subtrahieren

Beim schriftlichen **Subtrahieren** machen wir die **Additionsprobe.**

Beispiel:	Rechnen Sie:	
5 476	1 + 5 = 6	**Addiert** man zur **Differenz** den **Subtrahenden,** so erhält man den **Minuenden.**
— 3 235	4 + 3 = 7	
2 241	2 + 2 = 4	
	2 + 3 = 5	

Merken Sie:

Differenz + Subtrahend = Minuend.

Übungsaufgabe 16

a)	84,70 DM — 38,06 DM	124,00 qm — 14,05 qm	74,040 km — 8,300 km
b)	3,60 ha — 0,84 ha	18,50 hl — 9,72 hl	48,730 kg — 0,344 kg

17. Am 1. Januar hatte eine Kasse einen Bestand von 12 406,75 DM. Die Ausgabe betrug im Januar 3 064,50 DM. Wie groß war der Kassenbestand am 1. Februar?

18. Die Einwohnerzahl der Bundesrepublik Deutschland betrug 1962 rund 52 Millionen. In den Städten lebten 23 400 000 Menschen. Wie viele lebten auf dem Lande?

19. Der Kassenbestand beträgt 2 364,75 DM. Es werden ausgezahlt: 670,23 DM, 125,48 DM, 283,70 DM, 409,85 DM und 385,16 DM. Wie groß ist der Kassenrestbestand?

20. Für eine gelieferte Maschine, die 12 468,70 DM kostete, wurden gezahlt: 3 380 DM, 3 450 DM und 4 638,70 DM. Errechnen Sie den Restbetrag!

21. Bei einer Veranstaltung betrugen die Einnahmen 240,75 DM, 175,60 DM, 382,35 DM und 94,50 DM, die Ausgaben 145,80 DM, 217,50 DM, 85,20 DM und 132,65 DM. Wie hoch ist der Restbetrag?

22. Ein Warenlager hatte einen Bestand von 8 324,650 kg. Es wurden verkauft: 608,023 kg, 1 420,704 kg, 537,008 kg, 2 364,875 kg und 983,450 kg. Wie groß ist nun der Warenbestand?

23. Ein Kaufmann hatte am 31. März ein Bankguthaben von 3 840,75 DM. Im Monat April wurden eingezahlt: 1 206,40 DM, 975,30 DM, 832,25 DM und 1 430,00 DM; in demselben Zeitraum wurden abgehoben: 926,83 DM, 740,25 DM, 1 008,90 DM, 603,65 DM, 873,15 DM und 720,83 DM. Wie hoch war der Kontostand am 1. Mai?

24. Eine Weinhandlung hatte 24 250 l Wein gelagert. Es werden 10 873 l gekauft und 18 065 l verkauft. Ermitteln Sie den Weinbestand!

25. Ein Arbeiter kauft ein Motorrad für 1 980,50 DM und zahlt 260 DM an. Nach vier Wochen zahlt er weitere 345 DM. Wieviel beträgt die Restschuld?

4.3. Das Malnehmen oder Multiplizieren (Die Multiplikation)

	15	·	**12**	=	**180**
	Faktor	·	**Faktor**	=	**Produkt**
oder	**Multiplikand**	·	**Multiplikator**	=	**Produkt**

Zahlen, die multipliziert werden, nennt man **Faktoren.**

Der erste Faktor ist der **Multiplikand,** der zweite der **Multiplikator.**
Das Ergebnis heißt **Produkt.**
Das Zeichen für das Multiplizieren ist das **Multiplikationszeichen (·).**

$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \qquad 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24 \qquad 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Merken Sie:

Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig.

4.3.1. Das mündliche Multiplizieren

4.3.1.1. Das kleine Einmaleins

Das Multiplizieren einstelliger Zahlen mit einstelligen Zahlen

$7 \cdot 8 = 56 \qquad 9 \cdot 8 = 72$

Das kleine Einmaleins ist **Grundlage** und **Voraussetzung** für ein schnelles und sicheres Rechnen.

Wir üben deshalb das kleine Einmaleins so lange, bis wir es fließend beherrschen.

4.3.1.2. Das große Einmaleins

Das große Einmaleins lernen wir nicht auswendig, wir rechnen es auch nicht schriftlich, sondern wir rechnen im Kopf auf folgende Weise:

Das Multiplizieren einstelliger Zahlen mit zweistelligen Zahlen

	$9 \cdot 18 = 162$	$8 \cdot 67 = 536$
Wir **multiplizieren** die **Zehner:**	$9 \cdot 10 = 90$	$8 \cdot 60 = 480$
Wir **multiplizieren** die **Einer:**	$9 \cdot 8 = 72$	$8 \cdot 7 = 56$
Wir **addieren** die **Ergebnisse:**	**162**	**536**

Das Multiplizieren zweistelliger Zahlen mit zweistelligen Zahlen im Zahlenraum von 11 bis 19

$$\begin{aligned} 14 \cdot 17 &= 14 + 7 = 210 \\ &+ 4 \cdot 7 = 28 \\ &\qquad\quad \underline{\underline{238}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 16 \cdot 18 &= 16 + 8 = 240 \\ &+ 6 \cdot 8 = 48 \\ &\qquad\quad \underline{\underline{288}} \end{aligned}$$

Erklärung:

Wir **addieren** den **ersten Faktor** und den **Einer des zweiten Faktors** und hängen eine **Null** an:

14 + 7 = **21**	16 + 8 = **24**
mit angehängter 0 = **210**	mit angehängter 0 = **240**

Wir addieren hierzu das **Produkt der Einer:**

	4 · 7 = **28**	6 · 8 = **48**
Gesamtergebnis:	210 + 28 = **238**	240 + 48 = **288**

4.3.2. Das schriftliche Multiplizieren

4.3.2.1. Das Multiplizieren von ganzen Zahlen

2 345 · 365	2 345 · 365
11725	7035
14070	14070
7035	11725
855925	855925

Erklärung:

Wir setzen die **Faktoren nebeneinander.**

Die **Faktoren** können **beliebig vertauscht** werden.

Wir nehmen als **Multiplikator** den **Faktor mit der kleineren Stellenzahl.**

Wir können beim Multiplizieren mit den **Einern** beginnen (1. Beispiel), dann rücken wir die nächsten Reihen **nach links** ein.

Wir können auch mit dem **höheren Stellenwert** beginnen (2. Beispiel), dann rücken wir **nach rechts** ein.

4.3.2.2. Das Multiplizieren von Dezimalzahlen

36,4 · 7,9	243,45 · 3,6
3276	146070
2548	73035
287,56	876,420

Regel:

> **Man multipliziert Dezimalzahlen wie ganze Zahlen und streicht im Produkt von rechts nach links die Anzahl der Stellen beider Faktoren hinter dem Komma ab.**

4.3.2.3. Das Multiplizieren mit dekadischen Zahlen (10, 100, 1 000 usw.)

84 · 10 = 840	8,4 · 10 = 84
246 · 100 = 24 600	2,46 · 100 = 246
375 · 1 000 = 375 000	3,75 · 1 000 = 3 750

Regel:

> **Man multipliziert mit einer dekadischen Zahl, indem man entweder Nullen anhängt oder das Komma nach rechts setzt,**
> **und zwar mit 10 eine Stelle,**
> **mit 100 zwei Stellen,**
> **mit 1 000 drei Stellen usw.**

4.3.2.4. Rechenvorteile

Einer der beiden Faktoren hat eine 1

(die **1** kann **vorn, hinten** oder **in der Mitte** stehen)

568 · 16	81 · 752	9,68 · 61,7
3408	6016	580 8
9088	60912	6 776
		597,256

Erklärung:

Steht die **1 vorne,** so rückt die Treppe nach rechts ein.

Steht die **1 hinten,** so rückt die Treppe nach links ein.

Steht die **1 in der Mitte,** so rückt die eine Treppenstufe nach links, die andere nach rechts ein.

Die beiden **Faktoren** werden **nicht unterstrichen.**

Wir multiplizieren immer **zuerst mit der 1.**

Der mit der 1 vervielfachte Faktor gilt bereits als **Teilergebnis** und braucht **nicht noch einmal niedergeschrieben** zu werden.

Der Multiplikator wird in Faktoren zerlegt

768 · 72	=	768 · 9	8,76 · 5,6	=	8,76 · 8
(9 · 8)		6912 · 8	(8 · 7)		7008 · 7
		55296			49,056

Erklärung:

Wir zerlegen den **Multiplikator 72** in die **Faktoren 9 · 8** und den **Multiplikator 56** in die **Faktoren 8 · 7.**

Sodann **multiplizieren** wir zuerst **mit 9,** dann **mit 8,** bzw. zuerst **mit 8,** dann **mit 7.**

Die **Addition der Teilergebnisse** wird dadurch **erspart.**

4.3.2.5. Proben beim Multiplizieren

Beim Multiplizieren können wir eine **zweifache Probe** machen:

wir rechnen die Aufgabe noch einmal,

wir dividieren.

Aufgabe: 4 327 · 584

```
4 327 · 584
-----------
     17308
      34616
       21635
-----------
    2526968
===========
```

Wir rechnen die Aufgabe noch einmal:

Das dauert zu lange, und wir laufen Gefahr, **an derselben Stelle denselben Fehler** zu machen.

Wir dividieren das Produkt durch den Multiplikator:

2 526 968 : 584 = 4 327

Der Multiplikant ist das Ergebnis.

Wir dividieren das Produkt durch den Multiplikanden:

2 526 968 : 4 327 = 584

Der Multiplikator ist das Ergebnis.

Angewandte Aufgaben

26. A verbraucht täglich 4,25 DM. Wieviel verbraucht er in einem Jahr?

27. B kauft jede Woche eine Illustrierte zu 1,20 DM. Wieviel beträgt die vierteljährliche Ausgabe?

28. Ein Arbeiter zahlt wöchentlich 28,60 DM Lohnsteuer. Wieviel zahlt er jährlich?

29. Der Stundenlohn eines Arbeiters beträgt 4,70 DM. Wieviel verdient der Arbeiter a) an einem Tag (7 Stunden), b) in einer Woche (42 Stunden), c) in einem Jahr?

30. Eine Gasuhr zeigte beim Ablesen 435 m^3 an, im Vormonat waren es 363 m^3. Wieviel ist zu zahlen, wenn 1 m^3 Gas 0,45 DM kostet?

31. Zwischen Blitz und Donner wurden 20 Sekunden gezählt. Wie weit war das Gewitter noch entfernt, wenn die Schallgeschwindigkeit in der Luft 333 m je Sekunde (m/s) beträgt?

32. Wie lang ist der Äquator der Erde, wenn die Meridiane oder Mittagslinien (360) am Äquator 111,3055 km voneinander entfernt sind?

33. Im Jahre 1958 betrug die Steinkohlenförderung Deutschlands 134 089 407 t. Wieviel betrug der Wert der Kohle, wenn 1 t mit 117 DM berechnet wurde?

34. Das Jahreseinkommen eines Beamten beträgt 15 360 DM. Davon gibt er aus: für Kleidung jährlich 1 440 DM, für Miete monatlich 190 DM, für Ernährung wöchentlich 150 DM, für Krankenkasse, Versicherungen usw. vierteljährlich 276 DM. Wieviel DM bleiben für sonstige Ausgaben übrig?

35. Ein Anstreicher benötigt zum Tapezieren und Anstreichen eines Zimmers: 32 Rollen Tapete, jede Rolle zu 5,75 DM, 36 m Leiste zu 35 Pfennig, 15 Pfund Kreide zu 18 Pfennig und 3 Büchsen Lackfarbe zu 8,25 DM. Wieviel bekommt er beim Einkauf zurück, wenn er mit 5 Fünfzigmarkscheinen bezahlt?

4.4. Das Teilen oder Dividieren (Die Division)

	180	:	15	=	12
	Dividend	:	**Divisor**	=	**Quotient**
Probe:	12	·	15	=	180
	Quotient	·	**Divisor**	=	**Dividend**

Beim **Dividieren** nennt man die Zahl, die dividiert wird, **Dividend.**

Die Zahl, durch die dividiert wird, heißt **Divisor.**

Das Ergebnis ist der **Quotient.**

Das Zeichen für das Dividieren ist das **Divisionszeichen (:).**

Merken Sie:

Die Division ist eine Umkehrung der Multiplikation.

4.4.1. Dividend und Divisor sind ganze Zahlen

```
4 572 : 18 = 254
36
 97
 90
  72
  72
   0
```

Rechnen Sie:

45 : 18 = **2**; denn 2 · 18 = 36 Rest 9
Wir holen die 7 herunter.
97 : 18 = **5**; denn 5 · 18 = 90 Rest 7
Wir holen die 2 herunter.
72 : 18 = **4**; denn 4 · 18 = 72 Rest 0

Probe: 254 · 18 = 4 572

```
17 424 : 16 = 1 089
16
 1 4
   0
 1 42
 1 28
   144
   144
     0
```

Rechnen Sie:

17 : 16 = **1**; denn 1 · 16 = 16 Rest 1
Wir holen die 4 herunter.
14 : 16 = **0**; denn 0 · 16 = 0 Rest 14
Die 0 wird in das Ergebnis eingesetzt.
Wir holen die 2 herunter.
142 : 16 = **8**; denn 8 · 16 = 128 Rest 14
Wir holen die 4 herunter.
144 : 16 = **9**; denn 9 · 16 = 144 Rest 0

Probe: 1 089 · 16 = 17 424

4.4.2. Der Dividend ist eine Dezimalzahl

```
62,05 : 17 = 3,65
51
110
102
  85
  85
   0
```

Rechnen Sie:

62 : 17 = **3**; denn 3 · 17 = 51 Rest 11
Im **Dividenden** steht nun ein **Komma;**
wir setzen in das Ergebnis auch ein Komma.
Wir holen nun erst die 0 herunter.
110 : 17 = **6**; usw.

Probe: 3,65 · 17 = 62,05

Merken Sie:

Beim Überschreiten des Kommas im Dividenden muß auch im Ergebnis ein Komma gesetzt werden.

```
3,42 : 19 = 0,18
1 9
1 52
1 52
   0
```

Rechnen Sie:

3 : 19 = **0**
Wir setzen die **0** und das **Komma** in die **Antwort.**
34 : 19 = **1**; usw.

Probe: 0,18 · 19 = 3,42

Merken Sie:

Wenn das Dividieren der Ganzen Null ergibt, dann beginnt das Ergebnis mit Null-Komma.

4.4.3. Der Divisor ist eine Dezimalzahl

Beispiel: 10 368 : 0,32

Der Divisor darf keine Dezimalzahl sein; denn durch eine Dezimalzahl kann man nicht dividieren.

Wir machen aus dem Divisor eine ganze Zahl, indem wir ihn mit 100 multiplizieren; dann müssen wir den Dividenden ebenfalls mit 100 multiplizieren, damit sich das Ergebnis nicht ändert, also:

```
1 036 800 : 32 = 32 400
   76
   12 8
     000
```

Also ist 10 368 : 0,32 auch 32 400
Wir rechnen wie bei 4.4.1. auf Seite 28.

Probe: 32 400 · 0,32 = 10 368

Merken Sie:

Ist der Divisor eine Dezimalzahl, so wird beim Divisor das Komma so viele Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor kein Komma mehr hat; beim Dividenden hängt man die entsprechende Anzahl Nullen an.

4.4.4. Dividend und Divisor sind Dezimalzahlen

Beispiel: 5,4275 : 0,65

Der Divisor darf keine Dezimalzahl sein; denn durch eine Dezimalzahl kann man nicht dividieren.

Wir machen aus dem Divisor eine ganze Zahl, indem wir ihn mit 100 multiplizieren; dann müssen wir den Dividenden ebenfalls mit 100 multiplizieren, damit sich das Ergebnis nicht ändert, also:

```
542,75 : 65 = 8,35
 22 7
  3 25
     0
```

Also ist 5,4275 : 0,65 auch 8,35
Wir rechnen nun wie bei 4.4.2. auf Seite 28.

Probe: 8,35 · 0,65 = 5,4275

Merken Sie:

Ist der Divisor eine Dezimalzahl, so wird bei Dividend und Divisor das Komma so viele Stellen nach rechts verschoben, bis der Divisor kein Komma mehr hat.

4.4.5. Das Dividieren durch dekadische Zahlen (10, 100, 1 000 usw.)

840 : 10 = 84	84 : 10 = 8,4
24 600 : 100 = 246	246 : 100 = 2,46
375 000 : 1 000 = 375	3 750 : 1 000 = 3,750

Regel:

> **Man dividiert durch eine dekadische Zahl, indem man entweder Nullen abstreicht oder das Komma nach links setzt,**
> **und zwar durch 10 eine Stelle,**
> **durch 100 zwei Stellen,**
> **durch 1 000 drei Stellen.**

4.4.6. Rechenvorteile: Abgekürztes Verfahren

normales Verfahren

```
246 345 : 15 = 16 423
15
 96
 90
  6 3
  6 0
    34
    30
     45
     45
      0
```

abgekürztes Verfahren

```
246 345 : 15 = 16 423
 96
  6 3
    34
     45
      0
```

Beim **abgekürzten Verfahren** ermitteln wir zuerst die einzelnen **Ziffern des Quotienten:** 1, 6, 4, 2 und 3;
dann errechnen wir im Kopf die **Zwischenprodukte:**
15, 90, 60, 30 und 45 **ohne sie niederzuschreiben**
und finden gleichzeitig durch Ergänzen die **Restzahlen.**

Erklärung:

1. Arbeitsgang: 1 413 : 325 = 4

Quotient	Zwischenprodukte	Restzahlen	
4 · 5	= 20	+ 3	= 23
4 · 2 = 8 + 2	= 10	+ 1	= 11
4 · 3 = 12 + 1	= 13	+ 1	= 14

2. Arbeitsgang: 1 137 : 325 = 3

3 · 5	= 15	+ 2	= 17
3 · 2 = 6 + 1	= 7	+ 6	= 13
3 · 3 = 9 + 1	= 10	+ 1	= 11

3. Arbeitsgang: 1 625 : 325 = 5

5 · 5	= 25	+ 0	= 25
5 · 2 = 10 + 2	= 12	+ 0	= 12
5 · 3 = 15 + 1	= 16	+ 0	= 16

4.4.7. Proben beim Dividieren

Beim Dividieren können wir eine **zweifache Probe** machen:

wir rechnen die Aufgabe noch einmal,

wir multiplizieren.

Aufgabe:

```
238 468 : 376 = 634
225 6
 12 86
 11 28
  1 588
  1 504
     84 = Rest
```

Probe:

```
634 · 376
    3 804
    44 38
   190 2
  238 384
+      84
  238 468
```

Wir rechnen die Aufgabe noch einmal.

Das dauert zu lange, und außerdem laufen wir Gefahr, an derselben Stelle denselben Fehler zu machen.

Wir multiplizieren den Quotienten mit dem Divisor und addieren den Rest:

634 · 376 = 238 384 + 84 = 238 468

Der **Dividend** ist das Ergebnis.

Merken Sie:

Quotient · Divisor + Rest = Dividend

Angewandte Aufgaben

36. Ein Angestellter zahlt jährlich 1 101,60 DM Lohnsteuer. Wieviel beträgt die monatliche Lohnsteuer?

37. Wieviel Urlaubstage kann man mit 333,— DM verbringen, wenn der Pensionspreis täglich 18,50 DM beträgt?

38. Ein Kaufmann hat 35 kg Kaffee; er verkauft jedem Kunden 0,125 kg. Wieviel Kunden kann er beliefern?

39. In einem Haushalt werden durchschnittlich täglich 2,400 kg Kartoffeln verbraucht. Wie lange reicht ein Vorrat von 600 kg?

40. Vor dem Krieg lebten in Deutschland auf 470 627 km² 66 Mill. Einwohner. Wieviel Einwohner waren das auf 1 km² im Durchschnitt?

41. Die einfache Eisenbahnfahrt 2. Klasse von Köln nach Hamburg (480 km) kostet 49,00 DM. Berechnen Sie den Kilometerpreis!

42. Ein Kohlenschiff hat 4 125 t Kohlen geladen. Ein Eisenbahnwagen faßt 15 t. Wieviel Wagen benötigt man zum Ausladen des Schiffes?

43. An 26 Verkaufstagen betrug der Monatsumsatz eines Geschäftes 16 931,20 DM. Berechnen Sie die durchschnittliche Tageseinnahme!

4.5. Zusammenfassung und Wiederholung

Übungsaufgabe 44

Rechnen Sie als Reihenaufgabe!

a) 3 465 + 2 087	**b)** 4 827 + 3 934	**c)** 23,765 + 14,308	**d)** 2,325 + 5,008
— 4 308	— 6 003	— 7,005	— 5,876
· 327	· 456	· 3,704	· 23,45
: 524	: 487	: 3,58	: 0,427

Angewandte Aufgaben

45. Ein Bote kauft am Postschalter:
20 Postkarten zu 20 Pfennig, 100 Briefmarken zu 30 Pfennig,
50 Briefmarken zu 20 Pfennig, 30 Briefmarken zu 10 Pfennig,
Wieviel erhält er von 50,— DM zurück?

46. Am Postschalter werden folgende Beträge eingezahlt:
9,40 DM, 24,75 DM, 63,80 DM und 189,25 DM.
Wieviel erhält man von 300,— DM zurück:
a) bei Überweisung durch Postanweisung?
b) bei Überweisung durch Zahlkarte? (Gebührensätze auf Seite 105).
c) Wieviel ist die Überweisung durch Zahlkarte billiger?

47. Ein Haushalt verbrauchte: 45 m³ Gas zu 42 Pf und 63 kWh Strom zu 8,5 Pf. Die Gaszählergebühr beträgt monatlich 0,40 DM, die Stromzählergebühr 4,20 DM. Wieviel ist zu zahlen?

48. Eine Kilowattstunde Strom kostet 0,42 DM. Die Stromgebühren betrugen in einem Monat einschließlich 0,60 DM Zählermiete 4,38 DM. Wieviel Stunden brannte durchschnittlich je Tag eine 60-Watt-Lampe? (Monat = 30 Tage)

49. In einem Betrieb, in dem 235 Arbeiter beschäftigt sind, werden bei 42stündiger Arbeitszeit wöchentlich 45 402,00 DM Lohn ausgezahlt. Berechnen Sie den durchschnittlichen Stundenlohn eines Arbeiters!

50. Ein Arbeiter verdient wöchentlich 273,75 DM, seine beiden Söhne je 160,75 DM, seine Tochter 133,50 DM. Wie hoch ist das Jahreseinkommen der Familie?

51. Eine Schreibtischlampe mit einer 40-Watt-Birne brennt täglich 5 Stunden. Eine Kilowattstunde Strom kostet 0,45 DM. a) Wieviel Stunden kann die Lampe brennen, bis 1 kWh verbraucht ist? b) Wieviel kostet 1 Brennstunde? c) Wieviel kWh verbraucht die Lampe im Dezember? d) Wieviel ist im Dezember zu zahlen?

52. Bei einem Stundenlohn von 5,60 DM erhält ein Geselle nach Abzug der Steuern und Versicherungsbeiträge für 42 Stunden einen Wochenlohn von 210,20 DM. Berechnen Sie die Abzüge!

53. Von einem Lohnkonto in Höhe von 4 265,80 DM wurden folgende Beträge abgebucht: 430,50 DM; 448,60 DM; 394,70 DM; 412,25 DM; 376,90 DM; 452,30 DM und 508,20 DM. Wie hoch war der neue Lohnkontostand?

54. Ein Bauer hat 8 Kühe, jede Kuh gibt täglich im Durchschnitt 12 l Milch. Der Eigenverbrauch beträgt täglich 10 l, der Rest wird von der Molkerei mit 32 Pf je l vergütet. Wie groß ist die Einnahme im August?

55. Ein Förster läßt 840 Raummeter (rm) Brennholz schlagen. Er beschäftigt 6 Arbeitsgruppen zu je 3 Mann. Jede Gruppe schafft täglich in 8 Arbeitsstunden 10 rm. Der Stundenlohn eines Holzfällers beträgt 5,55 DM, der Akkordlohn 8,40 DM je rm. a) Wieviel Tage benötigen die 6 Arbeitsgruppen? b) Wieviel Stundenlohn und c) wieviel Akkordlohn muß der Förster insgesamt zahlen?

56. Ein D-Zug und ein Personenzug verlassen Stuttgart zu gleicher Zeit in entgegengesetzter Richtung. Der D-Zug hat eine Geschwindigkeit von 72 km/st, der Personenzug von 54 km/st. Wieviel km sind die beiden Züge nach 12 Minuten voneinander entfernt?

57. Die Schnell-Straßenbahn Düsseldorf-Duisburg hat eine Fahrzeit von 58 Minuten. Die Wartezeit an jeder Endstation beträgt 12 Minuten. Wie oft fährt die Bahn von 5.30 Uhr morgens bis 0.10 Uhr nachts von Düsseldorf nach Duisburg und zurück?

58. Eine Straßenbahnschiene ist 12 m lang. Wieviel Schienen benötigt man für eine 24 km lange zweigleisige Strecke?

5. Die vier Grundrechnungsarten mit gewöhnlichen Brüchen

5.1. Einführung in die gewöhnliche Bruchrechnung

Die Grundbegriffe der gewöhnlichen Bruchrechnung:

Zähler, Bruchstrich, Nenner

und **die Arten der gewöhnlichen Brüche:**

Scheinbrüche, Stammbrüche — echte Brüche, unechte Brüche, gleichnamige Brüche, ungleichnamige Brüche und **gemischte Zahlen**

sind bereits auf Seite 14 dieses Buches erkärt.

5.1.1. Das Verwandeln gemischter Zahlen in unechte Brüche

$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ $\qquad$ $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Wir rechnen: $1 = \frac{3}{3}$ $\qquad$ $2 = 2 \cdot \frac{3}{3} = \frac{6}{3}$ $\qquad$ $\frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$1 = \frac{4}{4}$ $\qquad$ $3 = 3 \cdot \frac{4}{4} = \frac{12}{4}$ $\qquad$ $\frac{12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Regel:

> **Man verwandelt eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner multipliziert und den Zähler hinzu addiert.**

5.1.2. Das Verwandeln unechter Brüche in gemischte Zahlen

$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{43}{8} = 5\frac{3}{8}$

Wir rechnen: $17 : 5 = 3$ Rest 2 $\qquad$ $2 : 5 = \frac{2}{5}$ $\qquad$ also: $3\frac{2}{5}$

$43 : 8 = 5$ Rest 3 $\qquad$ $3 : 8 = \frac{3}{8}$ $\qquad$ also: $5\frac{3}{8}$

Regel:

> **Man verwandelt einen unechten Bruch in eine gemischte Zahl, indem man den Zähler durch den Nenner dividiert.**

5.1.3. Das Erweitern der Brüche

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ $\qquad$ $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$

Wir rechnen: $\frac{1}{2}$ mit 2 erweitert $= \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4}$

$\frac{2}{3}$ mit 3 erweitert $= \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{}{9}$

$\frac{3}{4}$ mit 4 erweitert $= \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 4} = \frac{12}{16}$

Regel:

> **Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.**
>
> **Der Wert des Bruches ändert sich durch das Erweitern nicht.**

5.1.4. Das Kürzen der Brüche

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

Wir rechnen: $\frac{2}{4}$ durch 2 gekürzt $= \frac{2 : 2}{4 : 2} = \frac{1}{2}$

$\frac{6}{9}$ durch 3 gekürzt $= \frac{6 : 3}{9 : 3} = \frac{2}{3}$

$\frac{12}{16}$ durch 4 gekürzt $= \frac{12 : 4}{16 : 4} = \frac{3}{4}$

Regel:

> **Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl dividiert.**
>
> **Der Wert des Bruches ändert sich durch das Kürzen nicht.**

Das Kürzen am Bruchstrich

An einem Bruchstrich können auch **mehrere Brüche** stehen:

$$\frac{4 \cdot 21 \cdot 9 \cdot 5}{10 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 20} = \frac{9}{10}$$

Durch **das Kürzen am Bruchstrich** werden zunächst die einzelnen Brüche vereinfacht.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{4}} \cdot \overset{3}{\cancel{21}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{10}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{7}} \cdot \underset{5}{\cancel{20}}} = \frac{9}{10}$$

Erklärung:

Wir kürzen: 4 gegen 20 = oben 1, unten 5
21 gegen 7 = oben 3, unten 1
9 gegen 3 = oben 3, unten 1
5 gegen 10 = oben 1, unten 2

Das **Produkt der verbleibenden Zähler** ist $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 = \mathbf{9}$

Das **Produkt der verbleibenden Nenner** ist $2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 = \mathbf{10}$

Das **Ergebnis** heißt also: $\frac{9}{10}$

5.1.5. Das Gleichnamigmachen der Brüche

Das Erweitern und Kürzen der Brüche wenden wir beim Addieren und Subtrahieren der gewöhnlichen Brüche an.

Vor dem Addieren und Subtrahieren müssen die ungleichnamigen **Brüche** zuerst **gleichnamig gemacht** werden:

Die Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ haben den gemeinsamen Nenner **12**

Die Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{4}{5}$ haben den gemeinsamen Nenner **20**

Regel:

> **Man macht Brüche gleichnamig, indem man ihnen einen gemeinsamen Nenner (Hauptnenner) gibt.**
>
> **Man findet den Hauptnenner mehrerer Brüche, indem man alle Brüche zu einem gemeinsamen Nenner erweitert.**

Wir suchen den Hauptnenner

Wir multiplizieren die Nenner:

$\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$	$\frac{4}{5} + \frac{7}{9}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{4}{5}$
$4 \cdot 5 = \mathbf{20}$	$5 \cdot 9 = \mathbf{45}$	$2 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{30}$

Wir nehmen den größten Nenner in die Reihe,
bis wir eine Zahl finden, in der alle Nenner enthalten sind:

$\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$	$\frac{5}{8} + \frac{7}{10}$	$\frac{3}{4} + \frac{2}{5} + \frac{5}{12}$
8, 16, **24**	10, 20, 30, **40**	12, 24, 36, 48, **60**

24 ist die kleinste Zahl der Reihe **8**, die auch durch **6** teilbar ist;

40 ist die kleinste Zahl der Reihe **10**, die auch durch **8** teilbar ist;

60 ist die kleinste Zahl der Reihe **12**, die auch durch **4** und **5** teilbar ist.

Wir wenden die Primteiler-Zerlegung an: (vgl. Seite 43)

5.1.6. Das Verwandeln gewöhnlicher Brüche in Dezimalbrüche

Man verwandelt gewöhnliche Brüche in Dezimalbrüche,

indem man die Nenner auf Zehntel, Hundertstel oder Tausendstel erweitert:

$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = \mathbf{0{,}5}$ $\quad \frac{1}{4} = \frac{25}{100} = \mathbf{0{,}25}$ $\quad \frac{1}{8} = \frac{125}{1\,000} = \mathbf{0{,}125}$

indem man den Zähler durch den Nenner dividiert:

$\frac{4}{7} = 4 : 7 = 0{,}571 = \mathbf{0{,}57}$ $\quad \frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625 = \mathbf{0{,}63}$

Geht dabei die Division ohne Rest auf: $\frac{4}{5} = 4 : 5 = \mathbf{0{,}8}$
so ist es ein **endlicher Dezimalbruch.**

Geht die Division nicht auf und kehren nach dem Komma **immer die gleichen Ziffern** wieder: $\frac{2}{3} = 2 : 3 = \mathbf{0{,}\overline{666}} \ldots$
so ist es ein **unendlicher Dezimalbruch.**

Die beim unendlichen Dezimalbruch immer wiederkehrenden gleichen Ziffern nennt man **Perioden.**

Wir unterscheiden rein periodische und gemischt periodische Dezimalbrüche.

Rein periodische Dezimalbrüche:

$\frac{1}{3} = 1 : 3 = \mathbf{0,\overline{333}} \ldots$ $\qquad$ $\frac{4}{9} = 4 : 9 = \mathbf{0,\overline{444}} \ldots$

$\frac{6}{11} = 6 : 11 = 0,5454 = \mathbf{0,\overline{54}} \ldots$ $\qquad$ $\frac{4}{27} = 4 : 27 = 0,148148 = \mathbf{0,\overline{148}} \ldots$

Sie **beginnen unmittelbar hinter dem Komma,** enthalten nur **reine Perioden** und können **ein-, zwei- oder dreistellig** sein.

Gemischt periodische Dezimalbrüche:

$\frac{5}{6} = 5 : 6 = \mathbf{0,8\overline{333}} \ldots$ $\qquad$ $\frac{7}{12} = 7 : 12 = \mathbf{0,58\overline{333}} \ldots$

Den Perioden gehen eine oder mehrere **Vorziffern** voraus.

Die Schreibweise der periodischen Dezimalbrüche

Über die wiederkehrenden gleichen **Ziffern** macht man einen **Strich;**
hinter den periodischen **Dezimalbruch** setzt man **Pünktchen.**

5.1.7. Das Verwandeln von Dezimalbrüchen in gewöhnliche Brüche

Man verwandelt Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche, indem man die Dezimalbrüche einfach als gewöhnliche Brüche niederschreibt und diese dann kürzt:

$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $0,75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ $\qquad$ $0,375 = \frac{375}{1\,000} = \frac{3}{8}$

Übungsaufgabe 59

a) Verwandeln Sie die gemischten Zahlen in unechte Brüche!

$1\frac{3}{4}$ $\qquad$ $3\frac{5}{7}$ $\qquad$ $9\frac{4}{5}$ $\qquad$ $12\frac{3}{8}$ $\qquad$ $15\frac{7}{9}$

b) Verwandeln Sie die unechten Brüche in gemischte Zahlen!

$\frac{7}{4}$ $\qquad$ $\frac{13}{5}$ $\qquad$ $\frac{11}{7}$ $\qquad$ $\frac{29}{12}$ $\qquad$ $\frac{48}{15}$

c) Erweitern Sie die Brüche!

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\frac{5}{6}$ $\qquad$ $\frac{7}{\ }$ $\qquad$ $\frac{4}{12}$ $\qquad$ $\frac{15}{20}$ mit 2, 3, 4 und 5

d) Kürzen Sie die Brüche!

$\frac{3}{6}$ $\qquad$ $\frac{4}{8}$ $\qquad$ $\frac{6}{9}$ $\qquad$ $\frac{9}{24}$ $\qquad$ $\frac{21}{36}$ $\qquad$ $\frac{54}{60}$ $\qquad$ $\frac{75}{100}$ $\qquad$ $\frac{125}{500}$ $\qquad$ $\frac{375}{1\,000}$

e) Machen Sie die Brüche gleichnamig!

$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{5}{8}, \frac{3}{4}$ und $\frac{7}{12}$ $\qquad$ $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$

f) Verwandeln Sie die gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche!

$\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{3}{4}$ $\qquad$ $\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{5}{8}$ $\qquad$ $\frac{7}{20}$ $\qquad$ $\frac{3}{25}$ $\qquad$ $\frac{9}{50}$ $\qquad$ $\frac{3}{125}$ $\qquad$ $\frac{11}{200}$ $\qquad$ $\frac{13}{250}$

g) Verwandeln Sie die Dezimalbrüche in gewöhnliche Brüche!

0,7 $\qquad$ 0,25 $\qquad$ 0,80 $\qquad$ 0,250 $\qquad$ 0,625 $\qquad$ 0,875

5.2. Primzahlen — gerade und ungerade Zahlen — zusammengesetzte Zahlen — Teilbarkeitsregeln

5.2.1. Primzahlen

Zahlen, die sich **nur durch 1** und **durch sich selbst** teilen lassen:

1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 usw.

nennt man **Grundzahlen** oder **Primzahlen.**

Übersicht der Primzahlen von 1—1 000

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97
101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163
167	173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233
239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389
397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563
569	571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641
643	647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727
733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821
823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907
911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

5.2.2. Gerade und ungerade Zahlen

Zahlen, die **durch 2 teilbar** sind, nennt man **gerade Zahlen.**

Zahlen, die **nicht durch 2 teilbar** sind, nennt man **ungerade Zahlen.**

Alle geraden Zahlen — außer der 2! — sind **keine Primzahlen.**

5.2.3. Zusammengesetzte Zahlen

Zahlen, die sich außer durch 1 und durch sich selbst auch noch durch andere Zahlen teilen lassen, nennt man **zusammengesetzte Zahlen.**

Zusammengesetzte Zahlen lassen sich in ihre **Primfaktoren** zerlegen, z. B.:

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\qquad 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ $\qquad 36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Die Primfaktoren kann man nicht mehr weiter zerlegen.

5.2.4. Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist **ohne Rest** teilbar durch

- **2:** wenn die letzte Ziffer durch 2 teilbar oder eine 0 ist;
- **3:** wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist;
- **4:** wenn die beiden letzten Ziffern durch 4 teilbar sind;
- **5:** wenn die letzte Ziffer eine 5 oder eine 0 ist;
- **6:** wenn sie durch 2 und 3 teilbar ist;
- **8:** wenn die drei letzten Ziffern durch 8 teilbar sind;
- **9:** wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist;
- **10:** wenn die letzte Ziffer eine 0 ist;
- **12:** wenn sie durch 3 und 4 teilbar ist;
- **15:** wenn sie durch 3 und 5 teilbar ist;
- **25:** wenn die beiden letzten Ziffern durch 25 teilbar sind;
- **100:** wenn die beiden letzten Ziffern Nullen sind.

5.3. Der größte gemeinsame Teiler

24 und 36 haben die **gemeinsamen Teiler:** 2, 3, 4, 6 und 12.

Der **größte gemeinsame Teiler** von 24 und 36 ist **12.**

Wir finden den größten gemeinsamen Teiler durch die **Primteiler-Zerlegung,** d. h. durch die **Zerlegung in Primfaktoren.**

Bei der **Primteiler-Zerlegung** müssen wir darauf achten, daß dabei **nur Primzahlen** erscheinen.

Wir dürfen also 60 nur in: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ zerlegen,

nicht in : $2 \cdot 30$ oder $3 \cdot 20$ oder $4 \cdot 15$ oder $5 \cdot 12$ oder $6 \cdot 10$;

denn 4, 6, 10, 12, 15, 20 und 30 sind keine Primzahlen.

Wir suchen den größten gemeinsamen Teiler

a) von 24 und 36 $\qquad$ **b)** von 48 und 120.

Wir schreiben die **Zahlen untereinander** und zerlegen sie in ihre **Primfaktoren:**

a) $24 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3}$ $\qquad$ **b)** $48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot \underline{3}$

$36 = 2 \cdot \underline{2} \cdot 3 \cdot \underline{3}$ $\qquad$ $120 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$

Wir unterstreichen sodann die **Primfaktoren,** die in **beiden Reihen gemeinsam** vorkommen;

Zum Schluß **multiplizieren** wir die **unterstrichenen Primfaktoren e i n e r Reihe.**

a) $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ $\qquad$ **b)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

Der größte gemeinsame Teiler ist also bei **a) 12,** bei **b) 24.**

Regel:

> **Man findet den größten gemeinsamen Teiler, indem man die Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, die gemeinsamen Faktoren unterstreicht und die unterstrichenen Faktoren einer Reihe multipliziert.**

Wir gebrauchen den größten gemeinsamen Teiler beim **Kürzen der Brüche.**

Übungsaufgabe 60

Suchen Sie den größten gemeinsamen Teiler von:

18 und 42 $\qquad$ 128 und 162 $\qquad$ 24, 36 und 45 $\qquad$ 96, 144 und 204

48, 120, 216 und 288!

5.4. Das kleinste gemeinsame Vielfache (Hauptnenner)

Die Zahlen 24 und 36 haben die **gemeinsamen Vielfachen:** 72, 144, 216, 360 usw.

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** von 24 und 36 ist **72.**

Wir finden das kleinste gemeinsame Vielfache, den **Hauptnenner** mehrerer Zahlen, durch die **Primteiler-Zerlegung.**

Wir suchen das kleinste gemeinsame Vielfache

a) von 24 und 36 **b)** von 48 und 120

Wir schreiben die **Zahlen** wieder **untereinander** und zerlegen sie in ihre **Primfaktoren:**

a) $24 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3$
$36 = 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$

b) $48 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 3$
$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$

Wir **unterstreichen** diesmal die **Primfaktoren in der Reihe,** in der sie **am häufigsten vorkommen** (kommen sie in beiden Reihen gleich oft vor, dann werden sie **nur in einer Reihe** unterstrichen).

Wir **multiplizieren** die **unterstrichenen Primfaktoren beider Reihen:**

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$ **b)** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$

Das kleinste gemeinsame Vielfache ist also bei **a) 72,** bei **b) 240.**

Regel:

> **Man findet das kleinste gemeinsame Vielfache, den Hauptnenner, indem man die Zahlen in ihre Primfaktoren zerlegt, die einzelnen Faktoren in der Reihe unterstreicht, in der sie am häufigsten vorkommen, und die unterstrichenen Faktoren beider Reihen multipliziert.**

Wir gebrauchen das kleinste gemeinsame Vielfache beim **Gleichnamigmachen und Addieren der gewöhnlichen Brüche.**

Wir suchen den Hauptnenner

Wenn wir **ungleichnamige Brüche addieren** wollen:

$$\frac{7}{15} + \frac{13}{20} + \frac{9}{25} + \frac{11}{30} + \frac{14}{35}$$

so müssen wir zuerst den gemeinsamen Nenner, den **Hauptnenner,** suchen.
Wir finden den Hauptnenner durch die **Primteiler-Zerlegung.**

Wir unterscheiden zwei Arten der Primteiler-Zerlegung:

a)

	15	20	25	30	35
2		10		15	
2		5			
3	5			5	
5	1	1	5	1	7
5			1		
7					1

also: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2\,100}}$

b)

15	$\underline{3} \cdot 5$
20	$\underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 5$
25	$\underline{5} \cdot \underline{5}$
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$
35	$5 \cdot \underline{7}$

also: $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2\,100}}$

Erklärung zu Beispiel a):

Die Zahlen **15, 20, 25, 30** und **35** sind die **Nenner** der Brüche, die addiert werden sollen. Von diesen Nennern ist der **Hauptnenner** zu suchen.

Wir setzen diese Nenner nebeneinander **auf den waagerechten Strich.**

Wir dividieren die Nenner, sofern sie sich dividieren lassen, zuerst durch **2;** es erscheinen dann 10 und 15.

Die 10 läßt sich noch einmal durch 2 dividieren: ist 5.

Durch 2 läßt sich nun nicht mehr dividieren.

Wir dividieren durch die nächste Primzahl: durch **3;** es erscheinen nun 5 und 5.

Wir dividieren durch die nächste Primzahl: durch **5:** ist 1, 1, 5, 1 und 7.

Wir dividieren noch einmal durch **5:** ist 1.

Wir dividieren durch **7:** ist 1.

Jetzt haben wir bei allen Nennern die **Primzahl 1** errechnet.

Die **Primzahlen 2, 2, 3, 5, 5 und 7,** die **neben dem senkrechten Strich** erscheinen, werden nun miteinander **multipliziert.**

Das Produkt der Primzahlen $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2\,100}}$ ist der **Hauptnenner.**

Erklärung zu Beispiel b):

Wir schreiben die **Nenner 15, 20, 25, 30 und 35 senkrecht untereinander.**

Dann zerlegen wir sie in ihre **Primteiler:** $15 = 3 \cdot 5$; $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ usw.

Hierbei dürfen nur Primzahlen erscheinen:

also: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$, nicht: $24 = 4 \cdot 6$ oder $24 = 3 \cdot 8$.

Nun unterstreichen wir die **Primzahl 2** in der Reihe, in der sie am häufigsten vorkommt: also bei 20.

Die **Primzahl 3** kommt in drei Reihen je einmal vor; wir unterstreichen sie **nur einmal**, und zwar in der obersten Reihe.

Die **Primzahl 5** kommt am häufigsten bei 25 vor.

Die **Primzahl 7** kommt nur einmal vor.

Das Produkt der unterstrichenen Primzahlen $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = \underline{\underline{2\,100}}$ ist der **Hauptnenner.**

Übungsaufgabe 61

Suchen Sie das kleinste gemeinsame Vielfache von :

12, 18 und 27 — 10, 15 und 40 — 16, 24 und 30 — 15, 21, 25 und 36 — 12, 15, 24, 27 und 35!

5.5. Das Addieren von gewöhnlichen Brüchen

5.5.1. Das Addieren von gleichnamigen Brüchen

$$\frac{3}{12} + \frac{2}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3 + 2 + 5 + 1}{12} = \underline{\underline{\frac{11}{12}}}$$

Wir **addieren** die **Zähler:** $3 + 2 + 5 + 1 = 11$

Die Nenner bleiben **unverändert: 12;** also: $\underline{\underline{\frac{11}{12}}}$

Regel:

Man addiert gleichnamige Brüche, indem man die Zähler addiert; der Nenner bleibt unverändert.

5.2.2. Das Addieren von ungleichnamigen Brüchen

$$\frac{5}{10} + \frac{7}{12} + \frac{3}{5} + \frac{4}{6} = \frac{30 + 35 + 36 + 40}{60} = \frac{141}{60} = 2\frac{21}{60} = \underline{\underline{2\frac{7}{20}}}$$

Wir machen die **Brüche gleichnamig:** $\frac{30 + 35 + 36 + 40}{60}$

Wir **addieren** die **Zähler:** $\frac{141}{60}$, **verwandeln:** $2\frac{21}{60}$ und **kürzen:** $\underline{\underline{2\frac{7}{20}}}$

Merken Sie:

Unechte Brüche ($\frac{141}{60}$) bleiben nie als Endergebnis stehen; sie werden in gemischte Zahlen verwandelt ($2\frac{21}{60}$) und gekürzt ($2\frac{7}{20}$).

Regel:

Man addiert ungleichnamige Brüche, indem man sie zuerst gleichnamig macht und dann die Zähler addiert.

5.5.3. Das Addieren von gemischten Zahlen

$$3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{3}{4} = 12 + \frac{8 + 10 + 9}{12} = 12\frac{27}{12} = 14\frac{3}{12} = \underline{\underline{14\frac{1}{4}}}$$

Wir **addieren** zuerst die **Ganzen:** $3 + 4 + 5 = 12$

Wir machen die **Brüche gleichnamig** und **addieren** die **Zähler:** $\frac{8 + 10 + 9}{12} = \frac{27}{12}$

Wir **addieren** die beiden **Ergebnisse:** $12\frac{27}{12}$, **verwandeln:** $14\frac{3}{12}$ und **kürzen:** $\underline{\underline{14\frac{1}{4}}}$

Regel:

Man addiert gemischte Zahlen, indem man zuerst die ganzen Zahlen, dann die Brüche addiert.

Schriftliches Addieren gemischter Zahlen

	24
$16\frac{2}{3}$	16
$23\frac{3}{4}$	18
$26\frac{1}{2}$	12
$15\frac{7}{12}$	14
$32\frac{5}{8}$	15
	$\frac{75}{24}$
3	$\frac{3}{24}$
115	$\frac{1}{8}$

	60
$324\frac{1}{2}$	30
$218\frac{2}{3}$	40
$432\frac{3}{4}$	45
$537\frac{5}{6}$	50
$148\frac{4}{5}$	48
	$\frac{213}{60}$
3	$\frac{33}{60}$
1 662	$\frac{11}{20}$

Erklärung des 1. Beispiels:

Wir addieren zuerst die Brüche.

Wir schreiben oben den Hauptnenner 24 an und machen die Brüche gleichnamig:

$\frac{2}{3} = \frac{16}{24}$ $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$ $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ $\frac{7}{12} = \frac{14}{24}$ $\frac{5}{8} = \frac{15}{24}$

Von diesen Brüchen werden **nur die Zähler** niedergeschrieben.

Wir addieren die Zähler der gleichnamigen Brüche: $\frac{75}{24}$

Wir verwandeln den unechten Bruch in eine gemischte Zahl: $3\frac{3}{24}$

Der **Bruch** $\frac{3}{24}$ **wird gekürzt:** $\frac{1}{8}$

Wir addieren die Ganzen; die 3 wird mit den Einern addiert: 115

Gesamtergebnis: $\underline{\underline{115\frac{1}{8}}}$

Auf die gleiche Art wird das **2. Beispiel** gelöst.

Übungsaufgabe 62

a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}$ | $\frac{7}{15} + \frac{11}{15}$ | $15\frac{1}{2} + 17\frac{1}{2}$ | $3\frac{3}{5} + 5\frac{4}{5} + 9\frac{2}{5}$

b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6} + \frac{7}{9}$ | $\frac{5}{12} + \frac{9}{15}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{9}$ | $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8}$ | $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} + \frac{7}{10}$

d) $2\frac{1}{2} + 5\frac{3}{4}$ | $3\frac{4}{5} + 4\frac{3}{7}$ | $8\frac{4}{5} + 9\frac{5}{6} + 3\frac{2}{3}$ | $7\frac{4}{15} + 8\frac{7}{12} + 14\frac{5}{8}$

e) $18\frac{3}{4} + 27\frac{4}{9} + 36\frac{5}{6} + 45\frac{1}{2}$ $82\frac{3}{4} + 65\frac{5}{6} + 36\frac{3}{5} + 77\frac{2}{3} + 136\frac{1}{2}$

Angewandte Aufgaben

63. Vier Postpakete wiegen $12\frac{1}{2}$ kg, $8\frac{3}{4}$ kg, $13\frac{4}{5}$ kg und $9\frac{7}{10}$ kg. Wieviel beträgt das Gesamtgewicht?

64. Bei einer Bestandsaufnahme wurden gezählt: $5\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $6\frac{2}{3}$, $4\frac{5}{6}$ und $5\frac{1}{4}$ Dutzend Knöpfe. Wieviel Dutzend waren das insgesamt?

65. Für einen Rock benötigt ein Schneider $1\frac{1}{2}$ m Stoff, für eine Hose $1\frac{1}{4}$ m, für eine Weste $\frac{3}{5}$ m. Wieviel m Stoff benötigt er zum ganzen Anzug?

66. Für die Beleuchtung eines Gebäudes wurden im Januar $243\frac{5}{6}$, im Februar $203\frac{3}{4}$, im März $178\frac{2}{3}$ Brennstunden benötigt. Wieviel Brennstunden waren das im Vierteljahr?

67. Ein Landwirt bebaute $15\frac{7}{12}$ ha mit Weizen, $35\frac{11}{20}$ ha mit Roggen, $23\frac{7}{8}$ ha mit Gerste und $12\frac{4}{10}$ ha mit Hafer. Wieviel Hektar betrug das Ackerland insgesamt?

5.6. Das Subtrahieren von gewöhnlichen Brüchen

5.6.1. Das Subtrahieren von gleichnamigen Brüchen

$$\frac{18}{24} - \frac{9}{24} - \frac{6}{24} = \frac{18 - 9 - 6}{24} = \frac{3}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

Wir **subtrahieren** die **Zähler:** 18 — 9 — 6 = 3

Die Nenner lassen wir unverändert: **24;** also: $\frac{3}{24}$ oder $\underline{\underline{\frac{1}{8}}}$

Regel:

> **Man subtrahiert gleichnamige Brüche, indem man die Zähler subtrahiert; der Nenner bleibt unverändert.**

5.6.2. Das Subtrahieren von ungleichnamigen Brüchen

$$\frac{47}{48} - \frac{3}{8} - \frac{1}{6} = \frac{47 - 18 - 8}{48} = \frac{21}{48} = \underline{\underline{\frac{7}{16}}}$$

Wir machen die **Brüche gleichnamig:** $\frac{47 - 18 - 8}{48}$

Wir **subtrahieren** die **Zähler:** $\frac{21}{48}$ **und kürzen:** $\underline{\underline{\frac{7}{16}}}$

Regel:

> **Man subtrahiert ungleichnamige Brüche, indem man sie zuerst gleichnamig macht und dann die Zähler subtrahiert.**

5.6.3. Das Subtrahieren von gemischten Zahlen

$$8\frac{5}{6} - 3\frac{1}{4} = 5\,\frac{10 - 3}{12} = \underline{\underline{5\frac{7}{12}}}$$

Wir **subtrahieren** die **Ganzen:** 8 — 3 = **5**

Wir machen die **Brüche gleichnamig** und **subtrahieren** die **Zähler:** $\frac{10 - 3}{12} = \underline{\underline{\frac{7}{12}}}$

Wir **addieren** die beiden **Ergebnisse:** $\underline{\underline{\mathbf{5\frac{7}{12}}}}$

$$7\frac{5}{12} - 3\frac{7}{15} = 4\,\frac{25 - 28}{60} = 3\,\frac{85 - 28}{60} = 3\frac{57}{60} \text{ oder } \underline{\underline{3\frac{19}{20}}}$$

Wir **subtrahieren** die **Ganzen:** 7 — 3 = **4**

Wir machen die **Brüche gleichnamig** und **subtrahieren** die **Zähler:** $4\,\frac{25 - 28}{60}$

da das nicht geht, leihen wir von den 4 Ganzen 1 Ganzes = $\frac{60}{60}$

und rechnen: $3\,\frac{85 - 28}{60} = 3\frac{57}{60}$ oder $\underline{\underline{3\frac{19}{20}}}$

Regel:

> **Man subtrahiert gemischte Zahlen, indem man zuerst die ganzen Zahlen, dann die Brüche subtrahiert.**
>
> **Ist der Bruch des Subtrahenden größer als der Bruch des Minuenden, dann wird 1 Ganzes entliehen.**

Schriftliches Subtrahieren gemischter Zahlen

$$\begin{array}{r|r} & 24 \\ \hline 234\frac{5}{6} & 20 \\ -148\frac{3}{8} & 9 \\ \hline \underline{\underline{86\frac{11}{24}}} & \frac{11}{24} \end{array} \qquad \begin{array}{r|lr} & 12 & \\ \hline 327\frac{2}{3} & 8 + 12 = & 20 \\ -284\frac{3}{4} & 9 & 9 \\ \hline \underline{\underline{42\frac{11}{12}}} & & \frac{11}{12} \end{array} \qquad \begin{array}{r|lr} & 30 & \\ \hline 869\frac{2}{3} & 20 & + 60 = 80 \\ -213\frac{5}{6} & 25 & \\ -158\frac{4}{5} & 24 & \left.\right\} - \quad 64 \\ -174\frac{1}{2} & 15 & \\ \hline & & \frac{16}{30} \\ \underline{\underline{322\frac{8}{15}}} & & \frac{8}{15} \end{array}$$

Erklärung des 1. Beispiels:

Wir **subtrahieren** zuerst die **Brüche,** nachdem wir sie **gleichnamig** gemacht haben.

Der **Bruch des Subtrahenden** $(\frac{9}{24})$ ist **kleiner** als der des **Minuenden** $(\frac{20}{24})$;

er kann **subtrahiert** werden: $\frac{20}{24} - \frac{9}{24} = \frac{11}{24}$

Sodann **subtrahieren** wir die **ganzen Zahlen:** 234 — 148 = **86.**

Gesamtergebnis: $\underline{\underline{\mathbf{86\,\frac{11}{24}}}}$

Erklärung des 2. Beispiels:

Wir subtrahieren zuerst wieder die gleichnamig gemachten **Brüche.**

Diesmal ist der **Bruch des Subtrahenden** $(\frac{9}{12})$ **größer** als der des Minuenden $(\frac{8}{12})$;

er kann **nicht subtrahiert** werden,

wir müssen deshalb beim Minuenden **1 Einer** = $\frac{12}{12}$ **entleihen.**

Der **Minuend** heißt nun nicht mehr 327, sondern 326.

Die entliehenen $\frac{12}{12}$ addieren wir zu den $\frac{8}{12}$ und rechnen: $\frac{20}{12} - \frac{9}{12} = \frac{11}{12}$

Sodann **subtrahieren** wir die ganzen Zahlen: 326 — 284 = **42**

Gesamtergebnis: $\underline{\underline{42\,\frac{11}{12}}}$

Erklärung des 3. Beispiels:

Wir subtrahieren gleichzeitig mehrere Subtrahenden.

Der gemeinsame **Hauptnenner** ist 30.

Die **Summe der Brüche der Subtrahenden** $(\frac{64}{30})$ ist **größer** als der des **Minuenden** $(\frac{20}{30})$.

Wir müssen also beim Minuenden **2 Einer** $= \frac{60}{30}$ **entleihen.**

Der **Minuend** heißt nun nur noch **867.**

Die entliehenen $\frac{60}{30}$ addieren wir zu den $\frac{20}{30}$ und rechnen: $\frac{80}{30} - \frac{64}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

Sodann **subtrahieren** wir (vgl. unter 4.2.1.4.) die **ganzen Zahlen: 322**

Gesamtergebnis: $322\frac{8}{15}$

Übungsaufgabe 68

a) $4\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$	$8\frac{5}{12} - \frac{4}{15}$	$16\frac{4}{5} - 9\frac{5}{12}$	$25\frac{7}{9} - 16\frac{3}{4}$
b) $54\frac{3}{4} - 41\frac{7}{9}$	$76\frac{2}{9} - 38\frac{5}{6}$	$48\frac{3}{7} - 15\frac{3}{4}$	$56\frac{11}{15} - 38\frac{17}{20}$
c) $9\frac{9}{10} - 3\frac{2}{5} - 2\frac{1}{4}$	$8\frac{5}{6} - 2\frac{3}{5} - 1\frac{1}{2}$	$7\frac{3}{4} - 1\frac{5}{9} - 2\frac{2}{3}$	$9\frac{1}{2} - 3\frac{3}{5} - 2\frac{7}{8}$

d) $124\frac{7}{9} - 36\frac{3}{4} - 17\frac{2}{3} - 23\frac{5}{6}$ $\qquad$ $384\frac{2}{3} - 56\frac{3}{4} - 48\frac{5}{8} - 39\frac{1}{6} - 85\frac{3}{5}$

Angewandte Aufgaben

69. A ist $37\frac{3}{4}$ Jahre, B $31\frac{5}{6}$ Jahre alt. Wieviel Jahre ist A älter als B?

70. Ein Kaufmann kauft eine Ware mit $36\frac{3}{4}$ DM ein und verkauft sie mit $43\frac{4}{5}$ DM. Wie groß ist der Gewinn?

71. Die Geschwindigkeit eines D-Zuges beträgt $28\frac{5}{6}$ m/s, die eines Personenzuges $23\frac{2}{5}$ m/s. Wieviel beträgt der Unterschied?

72. Ein Omnibus fuhr an den 6 Tagen der Woche $35\frac{7}{10}$, $42\frac{3}{8}$, $53\frac{4}{5}$, $56\frac{3}{4}$, $45\frac{1}{2}$ und $58\frac{11}{20}$ km, ein anderer $36\frac{7}{10}$, $42\frac{7}{8}$, $48\frac{3}{5}$, $53\frac{4}{25}$, $62\frac{3}{4}$ und $65\frac{17}{100}$ km. Wieviel km legte der eine Omnibus mehr zurück als der andere?

5.7. Das Multiplizieren von gewöhnlichen Brüchen

5.7.1. Das Multiplizieren von Brüchen mit ganzen Zahlen

$$\frac{5}{12} \cdot 9 = \frac{45}{12} = 3\frac{9}{12} = 3\frac{3}{4}$$

Wir **multiplizieren** den **Zähler** mit der **ganzen Zahl:** $5 \cdot 9 = \mathbf{45}$

Den **Nenner** lassen wir **unverändert: 12** $\qquad$ also: $\frac{5}{12} \cdot 9 = \frac{45}{12}$

Wir verwandeln und **kürzen:** $\frac{45}{12} = 3\frac{9}{12}$ oder $3\frac{3}{4}$

Umgekehrt können wir auch **eine ganze Zahl mit einem Bruch** multiplizieren.

Regel:

Man multipliziert einen Bruch mit einer ganzen Zahl, indem man nur den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert; der Nenner bleibt unverändert.

5.7.2. Das Multiplizieren von gemischten Zahlen mit ganzen Zahlen

$$3\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$$

Wir verwandeln die **gemischte Zahl** in einen **Bruch:** $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Wir **multiplizieren** (wie bei 5.7.1.) den **Zähler mit der ganzen Zahl,** lassen den **Nenner unverändert** und **verwandeln:** $\frac{15}{4} \cdot 3 = \frac{45}{4} = 11\frac{1}{4}$

Umgekehrt können wir auch **einen Bruch mit einer ganzen Zahl** multiplizieren.

Regel:

Man multipliziert eine gemischte Zahl mit einer ganzen Zahl, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert.

5.7.3. Das Multiplizieren von Brüchen mit Brüchen

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{120}{360} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

Wir schreiben die **Brüche** an einen **gemeinsamen Bruchstrich**. $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$

Wir **multiplizieren** die **Zähler**: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Wir **multiplizieren** die **Nenner**: $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 360$

Wir **dividieren** das **Produkt der Zähler** durch das **Produkt der Nenner**: $\frac{120}{360}$

Wir **kürzen**: $\frac{120}{360} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$

Regel:

> **Man multipliziert Brüche mit Brüchen, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.**

5.7.4. Das Multiplizieren von gemischten Zahlen mit Brüchen

$$3\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} = \frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{14}{6} = 2\tfrac{2}{6} = \underline{\underline{2\tfrac{1}{3}}}$$

Wir **verwandeln** die **gemischte Zahl** in einen **Bruch**: $3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Wir schreiben die **Brüche** an einen **gemeinsamen Bruchstrich** $\frac{7 \cdot 2}{2 \cdot 3}$

Wir **dividieren** das **Produkt der Zähler** durch das **Produkt der Nenner**: $\frac{14}{6}$

Wir **verwandeln** und **kürzen**: $\frac{14}{6} = 2\frac{2}{6} = \underline{\underline{2\frac{1}{3}}}$

Umgekehrt können wir auch **einen Bruch mit einer gemischten Zahl** multiplizieren.

Regel:

> **Man multipliziert eine gemischte Zahl mit einem Bruch, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann die Brüche multipliziert.**

5.7.5. Das Multiplizieren von gemischten Zahlen mit gemischten Zahlen

$$2\tfrac{3}{4} \cdot 1\tfrac{2}{3} = \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 3} = \frac{55}{12} = \underline{\underline{4\tfrac{7}{12}}}$$

Wir **verwandeln** die **gemischten Zahlen** in **Brüche**: $\frac{11}{4}$ und $\frac{5}{3}$

Wir schreiben die **Brüche** an einen **gemeinsamen Bruchstrich**: $\frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 3}$

Wir **dividieren** das **Produkt der Zähler** durch das **Produkt der Nenner**: $\frac{55}{12}$

Wir **verwandeln**: $\frac{55}{12} = \underline{\underline{4\frac{7}{12}}}$

Regel:

> **Man multipliziert gemischte Zahlen mit gemischten Zahlen, indem man die gemischten Zahlen in unechte Brüche verwandelt und dann die Brüche multipliziert.**

Übungsaufgabe 73

a)	$\frac{5}{12} \cdot 9$	$\frac{13}{24} \cdot 6$	$\frac{13}{15} \cdot 12$	$\frac{21}{30} \cdot 15$
b)	$6\frac{3}{8} \cdot 7$	$9\frac{5}{12} \cdot 15$	$18\frac{7}{21} \cdot 23$	$25\frac{11}{12} \cdot 36$
c)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7}$	$\frac{5}{8} \cdot \frac{8}{9}$	$\frac{7}{8} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{11}{12}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{11}$
d)	$4\frac{3}{5} \cdot 2\frac{2}{3}$	$3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{5}{6}$	$8\frac{5}{7} \cdot 9\frac{3}{6} \cdot 17\frac{5}{12}$	$2\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{3}$

e) $12\frac{3}{4} \cdot 5\frac{7}{15} \cdot 2\frac{4}{7} \cdot 8\frac{11}{12}$ $\qquad$ $3\frac{3}{4} \cdot 4\frac{4}{5} \cdot 6\frac{5}{9} \cdot 18\frac{2}{3} \cdot 24\frac{5}{6}$

Angewandte Aufgaben

74. Ein Fußgänger legt in der Stunde $4\frac{4}{5}$ km zurück. Wieviel km legt er in $3\frac{1}{2}$ Stunden zurück?

75. Drei Zimmer mit einem Flächeninhalt von $14\frac{1}{2}$ m², $16\frac{1}{4}$ m² und $18\frac{3}{4}$ m² werden mit Pegulan belegt. 1 m² kostet 13,50 DM. Wieviel kostet der gesamte Bodenbelag?

76. In einem Haushalt wurden verbraucht: an 12 Tagen je $1\frac{3}{4}$ m³, an 10 Tagen je $1\frac{1}{2}$ m³, an 8 Tagen je $1\frac{1}{4}$ m³ Gas. Wieviel wurden im ganzen Monat verbraucht?

77. Der Brennholzvorrat für den Winter beträgt: $1\frac{1}{2}$ Raummeter (rm) Buchenholz, 1 rm zu 16,30 DM, $2\frac{1}{4}$ rm Kiefernholz, 1 rm zu 13,80 DM, und $2\frac{3}{4}$ rm Reiserholz, 1 rm zu 9,40 DM. Wieviel kostet der Brennholzvorrat?

78. Ein Güterzug hat 18 Kohlenwagen zu 20 t und 23 Wagen zu 15 t. In einem 20-t-Wagen sind $24\frac{3}{5}$ m³, in einem 15-t-Wagen $18\frac{3}{4}$ m³ Kohlen. Wieviel m³ Kohlen enthält der ganze Zug?

5.8. Das Dividieren von gewöhnlichen Brüchen

5.8.1. Das Dividieren von Brüchen durch ganze Zahlen

$$\frac{12}{15} : 3 = \underline{\underline{\frac{4}{15}}}$$

Der **Zähler** ist durch die ganze Zahl **teilbar.**

Wir **dividieren** den **Zähler** durch die **ganze Zahl** und lassen den **Nenner unverändert:**

$$\frac{12}{15} : 3 = \underline{\underline{\frac{4}{15}}}$$

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}, \qquad \text{also: } \frac{3}{4} : 2 = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

Der **Zähler** ist **nicht** durch die ganze Zahl **teilbar.**

Wir **multiplizieren** den **Nenner** mit der **ganzen Zahl** und lassen den **Zähler unverändert:** $\frac{3}{4 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$

Regel:

Man dividiert einen Bruch durch eine ganze Zahl, indem man den Zähler durch die ganze Zahl dividiert und den Nenner unverändert läßt oder — wenn der Zähler nicht teilbar ist — den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert und den Zähler beibehält.

5.8.2. Das Dividieren von gemischten Zahlen durch ganze Zahlen

$$8\frac{4}{5} : 6 = \frac{44}{5} : 6 = \frac{44}{30} = 1\frac{14}{30} = \underline{\underline{1\frac{7}{15}}}$$

Wir **verwandeln** die **gemischte Zahl** in einen **Bruch:** $8\frac{4}{5} = \frac{44}{5}$

Wir **dividieren** den **Bruch** (wie bei 5.8.1.) durch die **ganze Zahl:** $\frac{44}{5} : 6 = \frac{44}{30}$

Wir **verwandeln** und **kürzen:** $\frac{40}{30} = 1\frac{14}{30} = \underline{\underline{1\frac{7}{15}}}$

Regel:

Man dividiert eine gemischte Zahl durch eine ganze Zahl, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und dann den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert.

5.8.3. Das Dividieren von ganzen Zahlen durch Brüche

$$8 : 8 = 1 \qquad 8 : \frac{1}{2} = 16$$
$$8 : 4 = 2 \qquad 8 : \frac{1}{4} = 32$$
$$8 : 2 = 4 \qquad 8 : \frac{1}{8} = 64$$
$$8 : 1 = 8 \qquad 8 : \frac{1}{16} = 128$$

Beim **Dividieren** vorstehender Aufgaben stellen wir fest,

daß die **Teiler:**	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

sich von Aufgabe zu Aufgabe **halbieren,**

daß die **Ergebnisse:**	1	2	4	8	16	32	64	128

sich von Aufgabe zu Aufgabe **verdoppeln.**

Merken Sie:

Je kleiner der Teiler, desto größer das Ergebnis; halbiert sich der Teiler, so verdoppelt sich das Ergebnis.

In der 2. Spalte **dividieren** wir eine **ganze Zahl** durch einen **Bruch:**

$8 : \frac{1}{2} = 16 \qquad 8 : \frac{1}{4} = 32 \qquad 8 : \frac{1}{8} = 64 \qquad 8 : \frac{1}{16} = 128$

Wenn wir die **ganze Zahl** mit dem **umgekehrten Bruch multiplizieren:**

$8 \cdot \frac{2}{1} = 16 \qquad 8 \cdot \frac{4}{1} = 32 \qquad 8 \cdot \frac{8}{1} = 64 \qquad 8 \cdot \frac{16}{1} = 128$

so erhalten wir **dieselben Ergebnisse.**

Regel:

Man dividiert eine ganze Zahl durch einen Bruch, indem man mit dem umgekehrten Bruch multipliziert.

5.8.4. Das Dividieren von Brüchen durch Brüche

$$\frac{4}{5} : \frac{3}{8} = \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{15} = \underline{\underline{2\frac{2}{15}}}$$

Wir kehren den 2. Bruch um: aus $\frac{3}{8}$ machen wir $\frac{8}{3}$.

Wir **multiplizieren** den **1. Bruch** mit dem **umgekehrten 2. Bruch:** $\frac{4}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{32}{15}$

Wir **verwandeln:** $\frac{32}{15} = \underline{\underline{2\frac{2}{15}}}$

Regel:

Man dividiert einen Bruch durch einen Bruch, indem man mit dem umgekehrten 2. Bruch multipliziert.

5.8.5. Das Dividieren von gemischten Zahlen durch Brüche

$$3\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{15}{4} : \frac{5}{6} = \frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{90}{20} = 4\frac{10}{20} = \underline{\underline{4\frac{1}{2}}}$$

Wir **verwandeln** die **gemischte Zahl** in einen **Bruch:** $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4}$

Wir **multiplizieren** den **1. Bruch** mit dem **umgekehrten 2. Bruch:** $\frac{15}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{90}{20}$

Wir **verwandeln** und **kürzen:** $\frac{90}{20} = 4\frac{10}{20} = \underline{\underline{4\frac{1}{2}}}$

Umgekehrt können wir auch **Brüche** durch **gemischte Zahlen** dividieren.

Regel:

Man dividiert eine gemischte Zahl durch einen Bruch, indem man die gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandelt und diesen mit dem umgekehrten 2. Bruch multipliziert.

5.8.6. Das Dividieren von gemischten Zahlen durch gemischte Zahlen

$$2\frac{2}{3} : 2\frac{3}{4} = \frac{8}{3} : \frac{11}{4} = \frac{8}{3} \cdot \frac{4}{11} = \underline{\underline{\frac{32}{33}}}$$

Wir **verwandeln** die **gemischten Zahlen** in **Brüche:** $\frac{8}{3}$ und $\frac{11}{4}$

Wir **multiplizieren** den **1. Bruch** mit dem **umgekehrten 2. Bruch:** $\frac{8}{3} \cdot \frac{4}{11} = \underline{\underline{\frac{32}{33}}}$

Regel:

Man dividiert gemischte Zahlen durch gemischte Zahlen, indem man die gemischten Zahlen in unechte Brüche verwandelt und dann mit dem umgekehrten 2. Bruch multipliziert.

Übungsaufgabe 79

a)	$\frac{28}{35} : 7$	$\frac{32}{45} : 8$	$\frac{84}{95} : 12$	$\frac{135}{148} : 15$	$\frac{144}{180} : 16$
b)	$\frac{2}{3} : 5$	$\frac{5}{6} : 8$	$\frac{7}{12} : 9$	$\frac{11}{15} : 12$	$\frac{15}{16} : 18$
c)	$3\frac{4}{5} : 8$	$7\frac{5}{8} : 12$	$10\frac{3}{5} : 15$	$18\frac{2}{3} : 24$	$23\frac{5}{6} : 32$
d)	$\frac{7}{9} : \frac{4}{5}$	$\frac{5}{12} : \frac{3}{4}$	$\frac{13}{15} : \frac{7}{12}$	$\frac{19}{24} : \frac{14}{15}$	$\frac{27}{35} : \frac{19}{21}$
e)	$6\frac{1}{2} : 2\frac{3}{5}$	$8\frac{2}{3} : 4\frac{1}{5}$	$5\frac{3}{4} : 3\frac{5}{6}$	$7\frac{1}{3} : 2\frac{2}{5}$	$12\frac{3}{4} : 10\frac{1}{2}$

Angewandte Aufgaben

80. Ein Faß Wein zu $37\frac{1}{2}$ l wird auf Flaschen zu $\frac{3}{4}$ l gefüllt. Wieviel Flaschen werden benötigt?

81. Ein Wasserbehälter faßt $58\frac{1}{8}$ l. In wieviel Minuten ist er gefüllt, wenn das Zuflußrohr in der Minute $3\frac{3}{4}$ l schafft?

82. Wieviel Tage reichen $52\frac{1}{2}$ DM Taschengeld, wenn die tägliche Ausgabe $3\frac{3}{4}$ DM beträgt?

83. Kaffee verliert beim Rösten rund $\frac{1}{5}$ seines Gewichtes. Es bleiben nach dem Rösten $26\frac{1}{5}$ kg übrig. Berechnen Sie das Rohgewicht des Kaffees!

84. Wie lange reicht ein Koksvorrat von 375 Zentnern bei einem durchschnittlichen Tagesverbrauch von $2\frac{1}{2}$ Zentnern?

5.9. Zusammenfassung und Wiederholung

Übungsaufgabe 85

Rechnen Sie als Reihenaufgabe!

a) $8\frac{2}{3} + 7\frac{3}{4}$	b) $12\frac{5}{8} + 8\frac{5}{6}$	c) $2\frac{1}{3} + 4\frac{3}{4}$	d) $8\frac{1}{2} + 6\frac{2}{3}$	e) $25\frac{3}{4} + 18\frac{4}{5}$
$- 14\frac{7}{12}$	$- 19\frac{5}{24}$	$- 5\frac{7}{12}$	$- 13\frac{5}{6}$	$- 42\frac{7}{20}$
$\cdot\ 3\frac{1}{2}$	$\cdot\ 3\frac{2}{3}$	$\cdot\ 2\frac{1}{6}$	$\cdot\ 1\frac{3}{4}$	$\cdot\ 2\frac{1}{2}$
$:\ 1\frac{1}{2}$	$:\ 2\frac{1}{2}$	$:\ 2\frac{1}{2}$	$:\ 1\frac{2}{3}$	$:\ 1\frac{3}{4}$

Angewandte Aufgaben:

86. Von einem Ballen Leinen wurden verkauft: $4\frac{1}{2}$ m, $8\frac{3}{4}$ m und 15 m; der Rest beträgt $7\frac{3}{4}$ m. Wieviel m Leinen hatte der Ballen?

87. Von 3 Ballen Stoff zu je 25 m bleiben folgende Reste: $3\frac{9}{10}$ m, $4\frac{3}{5}$ m und $2\frac{3}{4}$ m. Wieviel m sind verkauft?

88. Eine Ledertasche, die $48\frac{1}{4}$ DM kostete, muß mit $36\frac{1}{2}$ DM verkauft werden. Wieviel DM beträgt der Verlust?

89. Ein Bauer bestellt $28\frac{1}{2}$ ha Land mit Weizen, $30\frac{3}{4}$ ha mit Roggen, $32\frac{1}{5}$ ha mit Hafer und $29\frac{3}{10}$ ha mit Gerste. Wieviel ha sind das insgesamt?

90. In wieviel Minuten füllt eine Leitung einen Wasserkasten von $18\frac{3}{4}$ m³ Rauminhalt, wenn die Leitung in der Minute $2\frac{1}{2}$ m³ Wasser einfüllt?

91. Die Oberfläche der Erde ist auf 510 Mill. km² berechnet. Der Anteil der Landfläche beträgt $149\frac{3}{5}$ Mill. km². a) Wie groß ist die Wasserfläche? b) Berechnen Sie den Unterschied zwischen Land- und Wasserfläche!

92. Der Cochemer Tunnel ist $4\frac{2}{10}$ km lang. Wieviel Minuten braucht ein Zug, der in der Minute $1\frac{2}{5}$ km fährt, zu seiner Durchfahrt?

93. Ein Lebensmittelhaus verkauft wöchentlich $136\frac{1}{2}$ kg Butter, $\frac{1}{2}$ kg zu 3,60 DM. Berechnen Sie den Vierteljahresumsatz!

94. Vier Gänse wiegen $10\frac{1}{2}$ kg, $12\frac{3}{4}$ kg, $11\frac{1}{5}$ kg und $9\frac{3}{10}$ kg. Wieviel kosten die Gänse, wenn das kg mit $7\frac{1}{2}$ DM berechnet wird?

95. Ein Schneider benötigt für einen Herrenanzug je nach Größe $3\frac{1}{5}$ m, $3\frac{1}{4}$ m oder $3\frac{3}{10}$ m Stoff. Der Stoff kostet je m 48 DM. Für Arbeitslohn und Zutaten berechnet er je Anzug 175 DM. Wieviel kosten die drei Anzüge?

96. Eine fünfköpfige Familie verbraucht täglich für jede Person $\frac{3}{8}$ l Milch, das l zu 66 Pf. Wieviel gibt die Familie im Mai für Milch aus?

97. Im Abstand von $12\frac{1}{2}$ m sollen zu beiden Seiten einer 2 km 625 m langen Landstraße Bäume gepflanzt werden. Wieviel Bäume werden benötigt?

98. Die Sonne ist 150 000 000 km von der Erde entfernt. Ein Sonnenstrahl braucht, um von der Sonne zur Erde zu gelangen, $8\frac{1}{3}$ Minuten. Wieviel km legt er in der Sekunde zurück?

99. Das Schlafzimmer einer Wohnung beträgt $\frac{1}{3}$, das Wohnzimmer $\frac{1}{4}$, die Kochküche $\frac{1}{12}$, das Kinderzimmer $\frac{1}{6}$ und das Badezimmer $\frac{1}{20}$ der Gesamtfläche; die Diele ist 10,50 m² groß. Wie groß ist der Flächeninhalt der Wohnung?

6. Die Sortenverwandlung

6.1. Maße, Gewichte und Münzen

Maße und Gewichte, die auf dem **Meter als Einheit** beruhen, bilden das **metrische Maß- und Gewichtssystem.**

Zum **metrischen Maß- und Gewichtssystem** gehören:
Längenmaße, Flächenmaße, Körpermaße, Hohlmaße und **Gewichte.**

Maße, die **nicht** auf dem **Meter als Einheit** beruhen, sind:
Zählmaße, Papiermaße, Zeitmaße und **Technische Maße.**

Das **Umwandeln größerer Einheiten** dieser **Maße, Gewichte** und **Münzen in kleinere** und umgekehrt **das Umwandeln kleinerer Einheiten in größere** nennt man **Sortenverwandlung.**

Da **Aufgaben mit Sortenverwandlungen** in allen bürgerlichen Rechnungsarten vorkommen, muß dieser Abschnitt gründlich durchgearbeitet werden.

6.1.1. Längenmaße

Die **Einheit der Längenmaße** ist das **Meter.**

1 Meter (1m) $= \frac{1}{40\,000\,000}$ des Erdumfangs (40 000 km);

es hat nur **eine Ausdehnung:** die **Länge.**

Unsere Längenmaße heißen:

Kilometer	Meter	Dezimeter	Zentimeter	Millimeter
km	m	dm	cm	mm

1 km	=	1 000 m	=	10 000 dm	=	100 000 cm	=	1 000 000 mm
		1 m	=	10 dm	=	100 cm	=	1 000 mm
				1 dm	=	10 cm	=	100 mm
						1 cm	=	10 mm

Die **Verwandlungszahl** bei Längenmaßen ist **10,**
d. h., ein Stellenwert ist immer **das Zehnfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

Außer den vorstehend genannten Längenmaßen ist noch die **Meile** gebräuchlich.
1 Landmeile (deutsche Meile) = 7 500 m
1 Seemeile (international gebräuchlich) = 1 852 m = **1 Knoten**

Alte Längenmaße:
Zoll, Spanne, Elle, Fuß, Schritt, Faden (Klafter).

6.1.2. Flächenmaße

Die **Einheit der Flächenmaße** ist das **Quadratmeter.**

1 Quadratmeter (1 qm = m^2) = ein rechtwinkliges Viereck mit 1 m Seitenlänge; es hat **zwei Ausdehnungen:** eine **Länge** und eine **Breite.**

Unsere Flächenmaße heißen:

Quadratkilometer	Hektar	Ar	Quadratmeter
km^2	ha	a	m^2
Quadratdezimeter	**Quadratzentimeter**	**Quadratmillimeter**	
dm^2	cm^2	mm^2	

1 km^2	=	100 ha	=	10 000 a	=	1 000 000 m^2
		1 ha	=	100 a	=	10 000 m^2
				1 a	=	100 m^2
1 m^2	=	100 dm^2	=	10 000 cm^2	=	1 000 000 mm^2
		1 dm^2	=	100 cm^2	=	10 000 mm^2
				1 cm^2	=	100 mm^2

Die **Verwandlungszahl** bei Flächenmaßen ist **100,**
d. h., ein Stellenwert ist immer **das Hundertfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

In der Landwirtschaft ist noch ein altes Flächenmaß gebräuchlich: der **Morgen.**
1 Morgen = ca. 25a, also: **1 ha = 4 Morgen.**

6.1.3. Körpermaße

Die **Einheit der Körpermaße** ist das **Kubikmeter.**

1 Kubikmeter (1 cbm = m^3) = ein Würfel (Kubus) mit 1 m Kantenlänge; es hat **drei Ausdehnungen:** eine **Länge,** eine **Breite** und eine **Höhe.**

Unsere Körpermaße heißen:

Kubikmeter m^3		Kubikdezimeter dm^3		Kubikzentimeter cm^3		Kubikmillimeter mm^3
1 m^3	=	**1 000 dm^3**	=	1 000 000 cm^3	=	1 000 000 000 mm^3
		1 dm^3	=	**1 000 cm^3**	=	1 000 000 mm^3
				1 cm^3	=	**1 000 mm^3**

Die **Verwandlungszahl** bei Körpermaßen ist **1 000**,
d. h., ein Stellenwert ist immer **das Tausendfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

In der Forstwirtschaft sind folgende **Raummaße** gebräuchlich:

1 Festmeter	(fm),	=	Raummaß für **Langholz**
	1 fm	=	1 m^3 feste, lückenlose Holzmasse
1 Raummeter	(rm),		Raummaß für **Stapelholz**
	1 rm	=	1 m^3 geschichtetes Holz mit Zwischenräumen

6.1.4. Hohlmaße

Die **Einheit der Hohlmaße** ist das **Liter.**

Unsere Hohlmaße heißen:

Hektoliter	Liter	
hl	l	**1 hl = 100 l**

Die **Verwandlungszahl** bei Hohlmaßen ist **100**,
d. h., ein Stellenwert ist immer **das Hundertfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

Das **Raummaß für Schiffe** heißt **Registertonne.**

1 Registertonne (1 RT)	=	2,832 m^3
Brutto-Registertonne (BRT)	=	gesamter Vermessungsraum des Schiffes
Netto-Registertonne (NRT)	=	Nutzraum für die Ladung

6.1.5. Gewichte

Die **Einheit der Gewichte** ist das **Kilogramm.**
1 Kilogramm (1 kg) = Gewicht von 1 l destilliertem Wasser bei + 4° Celsius.

Unsere Gewichte heißen:

Tonne t		Kilogramm kg		Gramm g		Milligramm mg
1 t	=	**1 000 kg**	=	1 000 000 g	=	1 000 000 000 mg
		1 kg	=	**1 000 g**	=	1 000 000 mg
				1 g	=	**1 000 mg**

Die **Verwandlungszahl** bei Gewichten ist **1 000**,
d. h., ein Stellenwert ist immer **das Tausendfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

Außer vorstehenden Gewichten gibt es noch:

Doppelzentner		Zentner		Pfund
1 t	=	**10 dz**	=	20 Ztr.
1 dz	=	**100 kg**	=	200 Pfd.
1 Ztr.	=	**50 kg**	=	100 Pfd.
1 Pfd	=	$\frac{1}{2}$ **kg**	=	500 g

Merken Sie:

Zentner und Pfund sind amtlich nicht mehr gebräuchlich.

Zusammenhang zwischen Körpermaßen, Hohlmaßen und Gewichten

1 dm^3 faßt 1 l Wasser, und dieses wiegt (bei + 4° Celsius) 1 kg.
also: **1 dm^3 = 1 l = 1 kg**

6.1.6. Zählmaße

Die im Handel gebräuchlichen **Zählmaße** sind:

Gros, Dutzend, Stück, Schock und **Mandel.**

Schreibfedern z. B. werden im **Gros** und **Dutzend** verkauft,
Eier werden mit **Schock** und **Mandel** gehandelt.

1 Dutzend (Dtzd.)		= 12 Stück (St.),
1 Gros	= 12 Dutzend	= 144 Stück,
1 Schock	= 4 Mandel	= 60 Stück,
1 Mandel		= 15 Stück.

6.1.7. Papiermaße

Die in der Papierindustrie gebräuchlichen **Papiermaße** sind:

Buch, Heft und **Bogen.**

1 Buch	=	10 Hefte	=	100 Bogen
		1 Heft	=	**10 Bogen**

Die deutsche Papierindustrie stellt Briefbogen von einheitlicher (genormter) Größe her, die das **Kennzeichen DIN** tragen.

DIN hieß ursprünglich: **D**eutsche **I**ndustrie **N**orm;
heute gedeutet als: **D**as **i**st **N**orm.

Die gebräuchlichsten **Papiergrößen im DIN-Format** sind:

DIN A 4	=	210 × 297 mm	=	Briefblatt (Aktenbogen),
DIN A 5	=	148 × 210 mm	=	Halbbriefblatt (für kurze Mitteilungen),
DIN A 6	=	105 × 148 mm	=	Kleinbriefblatt (Postkarte).

6.1.8. Zeitmaße

1 Sonnenjahr = $365\frac{1}{4}$ Tage (genau: 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 48 Sekunden), d. i. der Zeitabschnitt, in dem die Erde einmal die Sonne umkreist.

1 Schaltjahr = 366 Tage; der überschießende Vierteltag wird in jedem 4. Jahr am 29. Februar als Schalttag angefügt. Schaltjahre sind die Jahre, deren Jahreszahl durch 4 teilbar ist.

1 Kalenderjahr	= 365 Tage = 12 Monate = 52 Wochen
1 Vierteljahr	= 3 Monate = 13 Wochen
1 Monat	= 30, 31 oder 28 Tage
1 Woche	= 7 Tage
1 Tag	= 24 Stunden
1 Stunde (Std.)	= (Std. auch **h** = hora = Stunde) 60 Minuten
1 Minute (Min.)	= (Min. auch **min**) 60 Sekunden
1 Sekunde (Sek.)	= (Sek. auch **sec, sek**) kleinste Zeiteinheit

6.1.9. Technische Maße

1 Meter in der Sekunde		= 1 m/s
1 Kilometer in der Stunde		= 1 km/h (von hora = Stunde)
1 Watt	= 1 W	= Einheit der elektrischen Leistung
1 Volt	= 1 V	= Einheit der elektrischen Spannung
1 Ampere	= 1 A	= Einheit der elektrischen Stromstärke
1 Ohm	= 1 Ω	= Einheit des elektrischen Widerstandes
1 Kilowatt	= 1 kW	= 1 000 Watt
1 Kilowattstunde	= 1 kWh	= Einheit für elektrische Arbeit
1 Kilokalorie	= 1 kcal	= 1 Wärmeeinheit
1 Wärmeeinheit	= 1 WE	= eine Wärmemenge, die 1 kg Wasser um 1° Celsius (1° C) erwärmt
1 Atmosphäre	= 1 at	= der Druck, den 1 kg auf 1 cm^2 ausübt
	atü	= Atmosphärenüberdruck
1 Pferdestärke	= 1 PS	= 736 Watt bzw. die Kraft, die 75 kg in der Sekunde 1 m hoch hebt

6.1.10. Münzen (Währungen)

Deutschland	1 DM	= 100 Pfennige
Belgien	1 belg. Franc	= 100 Centimes
Dänemark	1 dän. Krone	= 100 Öre
Frankreich	1 Franc	= 100 Centimes
Griechenland	1 Drachme	= 100 Lepta
Großbritannien	1 Pfund Sterling	= 100 Pence
Italien	1 Lira	= 100 Centesimi
Jugoslawien	1 Dinar	= 100 Para
Luxemburg	1 lux. Franc	= 100 Centimes
Niederlande	1 holl. Gulden	= 100 Cents
Norwegen	1 norw. Krone	= 100 Öre
Polen	1 Zloty	= 100 Groczy (Groschen)
Portugal	1 Escudo	= 100 Centavos
Rumänien	1 Lei	= 100 Bani
Schweden	1 schwed. Krone	= 100 Öre
Schweiz	1 schw. Franken	= 100 Rappen

Sowjetunion	1 Rubel	= 100 Kopeken
Spanien	1 Peseta	= 100 Centimos
Tschechoslowakei	1 tschech. Krone	= 100 Heller
Türkei	1 türk. Pfund	= 100 Piaster
Ungarn	1 Pengö	= 100 Filler
USA	1 Dollar	= 100 Cents

6.2. Das Verwandeln der Maße und Gewichte

Bei **Längen-, Flächen-, Hohl- und Körpermaßen** sowie bei **Gewichten kann** man **größere Einheiten in kleinere** und umgekehrt **kleinere in größere** verwandeln, z. B.

1 m = 100 cm 1 000 kg = 1 t.

Regel:

Man verwandelt eine größere Einheit in eine kleinere Einheit, indem man bei ganzen Zahlen Nullen anhängt oder bei Dezimalzahlen das Komma nach rechts setzt, und zwar

bei Längenmaßen	**1, 2 oder 3 Stellen,**
bei Flächen- und Hohlmaßen	**2, 4 oder 6 Stellen,**
bei Körpermaßen und Gewichten	**3, 6 oder 9 Stellen,**

z. B.	1 m	= 10 dm	= 100 cm	= 1 000 mm
	1,234 m	= 12,34 dm	= 123,4 cm	= 1 234 mm

Man verwandelt eine kleinere Einheit in eine größere Einheit, indem man bei ganzen Zahlen Nullen abstreicht oder bei Dezimalzahlen das Komma nach links setzt, und zwar

bei Längenmaßen	**1, 2 oder 3 Stellen,**
bei Flächen- und Hohlmaßen	**2, 4 oder 6 Stellen,**
bei Körpermaßen und Gewichten	**3, 6 oder 9 Stellen,**

z. B.	1 000 mm	= 100 cm	= 10 dm	= 1 m
	1 234 mm	= 123,4 cm	= 12,34 dm	= 1,234 m

6.3. Übersicht über das metrische Maß- und Gewichtssystem

Die folgenden Tabellen geben eine Übersicht über die gebräuchlichen **Längenmaße, Flächenmaße, Raum- und Hohlmaße** und **Gewichte** und ihre **Verwandlung.**

Längenmaße
(Verwandlungszahl 10)

Kilometer km	Hektometer hm	Dekameter Dm	Meter m	Dezimeter dm	Zentimeter cm	Millimeter mm
1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000	1 000 000 000
100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	100 000 000
10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
1	**10**	**100**	**1 000**	**10 000**	**100 000**	**1 000 000**
0,1	**1**	10	100	1 000	10 000	100 000
0,01	0,1	**1**	10	100	1 000	10 000
0,001	0,01	0,1	**1**	10	100	1 000
0,0001	0,001	0,01	0,1	**1**	10	100
0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	**1**	10
0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,1	**1**

Flächenmaße

(Verwandlungszahl 100)

Quadrat-kilometer km^2	Hektar ha	Ar a	Quadratmeter m^2	Quadrat-dezimeter dm^2	Quadrat-zentimeter cm^2	Quadrat-millimeter mm^2
1	100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000	1 000 000 000 000
0,1	10	1 000	100 000	10 000 000	1 000 000 000	100 000 000 000
0,01	1	100	10 000	1 000 000	100 000 000	10 000 000 000
0,001	0,1	10	1 000	100 000	10 000 000	1 000 000 000
0,0001	0,01	1	100	10 000	1 000 000	100 000 000
0,00001	0,001	0,1	10	1 000	100 000	10 000 000
0,000001	0,0001	0,01	1	100	10 000	1 000 000
0,0000001	0,00001	0,001	0,1	10	1 000	100 000
0,00000001	0,000001	0,0001	0,01	1	100	10 000
0,000000001	0,0000001	0,00001	0,001	0,1	10	1 000
0,0000000001	0,00000001	0,000001	0,0001	0,01	1	100

Raum- und Hohlmaße

(Verwandlungszahl 1 000)
unter Angabe des Gewichts für Wasser bei + 4° Celsius

Kubikmeter m^3 (t)	Hektoliter hl (dz)	Liter / Kubikdezimeter l / dm^3 (kg)	Kubikzentimeter cm^3 (g)	Kubikmillimeter mm^3 (mg)
1	10	1 000	1 000 000	1 000 000 000
0,1	1	100	100 000	100 000 000
0,01	0,1	10	10 000	10 000 000
0,001	0,01	1	1 000	1 000 000
0,0001	0,001	0,1	100	100 000
0,00001	0,0001	0,01	10	10 000
0,000001	0,00001	0,001	1	1 000
0,0000001	0,000001	0,0001	0,1	100
0,00000001	0,0000001	0,00001	0,01	10
0,000000001	0,00000001	0,000001	0,001	1

Gewichte

(Verwandlungszahl 1 000)

Tonnen t	Doppelzentner dz	Kilogramm kg	Gramm g	Milligramm mg
1	10	1 000	1 000 000	1 000 000 000
0,1	1	100	100 000	100 000 000
0,01	0,1	10	10 000	10 000 000
0,001	**0,01**	**1**	**1 000**	**1 000 000**
0,0001	0,001	0,1	100	100 000
0,00001	0,0001	0,01	10	10 000
0,000001	**0,00001**	**0,001**	**1**	**1 000**
0,0000001	0,000001	0,0001	0,1	100
0,00000001	0,0000001	0,00001	0,01	10
0,000000001	**0,00000001**	**0,000001**	**0,001**	**1**

6.4. Übungen und angewandte Aufgaben

Übungsaufgabe 100

Verwandeln Sie jeweils die einzelnen Sorten!

a) in cm:
17,63 m — 0,4 m — 6,97 dm — 23 km — 0,7 mm

b) in km:
9 000 m — 675 m — 80,3 m — 1 km 50 m — 3 km 7 m
16 km 407 m — 53 m — 408 m — 4 m — 1 km 1 m

c) in dm^2, (cm^2, mm^2):
4,5 m^2 — 32 m^2 — 7,25 m^2 — 18,04 m^2 — 0,05 m^2

d) in m^2 (a, ha):
23 km^2 — 18 ha — 4,7 km^2 — 900 a — 715,6 a

e) in dm^3:
18 m^3 — 5,450 m^3 — 4,085 m^3 — 0,056 m^3 — 1,001 m^3

f) in kg:
8,975 t — 41,6 t — 0,045 t — 29,035 t — 0,600 t

g) in kg:
648 g — 6 g — 27 g — 3 725 g — 25 kg 886 g

h) in t:
19 t 465 kg — 805 kg — 5 kg — 17 Ztr. — 8 dz

i) in hl:
6,24 m^3 — 516 l — 5 l — 808 dm^3 — 56 000 cm^3

k) in cm^3:
5 l — 0,6 l — 3,4 l — $\frac{4}{5}$ l — $3\frac{1}{2}$ l

l) in l:
24 500 cm^3 — 8 750 cm^3 — 840 cm^3 — 76 cm^3 — 4 cm^3

m) in m^3:
75 hl — 125 hl — 230 hl — 9 hl — $15\frac{3}{4}$ hl

n) in m³

2 500 l	6 470 l	780 l	56 l	8 l

o) in hl:

8 m³	3,875 m³	0,825 m³	$\frac{3}{4}$ m³	$3\frac{1}{2}$ m³

p) in kg:

9 hl	3,75 hl	0,6 hl	$\frac{3}{4}$ hl	$\frac{4}{5}$ hl

q) in kg:

5 m³	850 m³	2,3 m³	0,7 m³	$\frac{1}{2}$ m³

Übungsaufgabe 101

Verwandeln Sie die ungleichen Benennungen in gleiche Benennungen, setzen Sie die waagerechten Zahlenreihen untereinander und addieren Sie!

a) 3,45 m + 76 cm + 45 dm + 227 m 16 cm + 5 cm + 123 dm =

b) 24,70 ha + 225 qm + 37a + 43,5 ha + 375 a + 304 qm =

c) 35,720 km + 750 m + 6,809 km + 63 m + 124,023 km + 9 m =

d) 4,8 m³ + 675 dm³ + 59,3 m³ + 305 dm³ + 23,076 m³ =

Angewandte Aufgaben

102. Stellen Sie über folgende Beträge einen Kassenzettel aus: 15,40 DM, 35 Pfg., 327 DM, 4 DM 60 Pfg., 8 Pfg. und 23,07 DM!

103. Es wurden geliefert: 7,348 t, 17 kg, 600 kg, 8,03 dz, 0,40 t und 1 503 kg. Wieviel t beträgt die Gesamtlieferung?

104. Die Bundesrepublik Deutschland ist 24 800 000 ha groß. Wieviel km² sind das?

105. Die Insel Helgoland ist 570 000 m² groß. Wieviel ha sind das?

106. Ein Eisenbahnwagen ist mit 15 t Kohlen beladen. Wieviel kg sind das?

107. Es wurden 150 dz Koks geliefert. Wieviel t sind das?

108. Ein Benzintank faßt 50 000 l. Wie groß ist der Rauminhalt?

109. Ein Kraftwagen fährt mit einer Geschwindigkeit von 85 km/h. Wieviel m in der Sekunde sind das?

110. Der Seeweg von Hamburg nach New York beträgt 3 050 Seemeilen. Wieviel km sind das?

111. Bei Windstärke 12 (Orkan) beträgt die Geschwindigkeit des Windes in der Sekunde ungefähr 30 m. Wieviel km/h sind das?

112. Ein Bauerngut hat 583 ha Ackerland, 123 a Gartenland, 215,7 ha Wiesen, 675,5 ha Wald und 86 a Heide. Berechnen Sie die Gesamtfläche!

113. Eine Wäscherei verbraucht monatlich 425 000 l Wasser. Wieviel kostet das Wasser, wenn 1 hl mit 7,2 Pfg. berechnet wird?

114. Von einem Weinbestand von 60 hl wurden 5 200 l verkauft. Wieviel hl Wein lagerten nun noch im Keller?

115. Von einem 45 a großen Acker wurden 1 350 kg Kartoffeln geerntet. Wieviel dz erntet man bei gleichem Ertrag von 0,9 ha?

116. Ein Faß Bier mit 0,99 hl Inhalt wird auf Flaschen ($\frac{3}{4}$ l) gefüllt. Wieviel Flaschen werden benötigt?

117. Ein $2\frac{1}{2}$ t-Lieferwagen hat bereits 10 dz geladen. Wieviel Sack zu 75 kg können noch dazugeladen werden?

118. Ein LKW hat 3,6 t Brikett geladen. Wieviel Stück (600 g) sind das?

119. Wieviel dz Heu werden von einer 185 a großen Wiese geerntet, wenn man von 1 ha durchschnittlich 2 500 kg rechnet?

120. Ein 76,8 a großes Grundstück wird in Parzellen von je 640 m² aufgeteilt. Wieviel Baugrundstücke gibt das?

121. Ein Grundstück von 24 a wird gegen 3 Grundstücke von je 720 m² ausgetauscht. Wieviel muß bei einem Preis von 65 DM je m² zugezahlt werden?

7. Die Dreisatzrechnung

7.1. Einführung in die Dreisatzrechnung

Die **Dreisatzrechnung** (Regeldetri) ist die wichtigste Rechnungsart im täglichen Leben; sie ist die **Grundlage aller bürgerlichen Rechnungsarten.**

Bei der **Dreisatzaufgabe** sind immer **drei Glieder gegeben;** das unbekannte **vierte Glied** wird **gesucht.**

Die **Lösung der Dreisatzaufgaben** geschieht auf dreifache Weise.

Wir können schließen:

von einer **bekannten Einheit**	auf eine	**unbekannte Mehrheit,**
von einer **bekannten Mehrheit**	auf eine	**unbekannte Einheit,**
von einer **bekannten Mehrheit**	über eine	**Einheit**
	auf eine	**unbekannte Mehrheit.**

Dieses „**Schließen**" von **bekannten Einheiten** auf **unbekannte Mehrheiten** und umgekehrt nennt man auch **Schlußrechnung.**

Bei der **Lösung der Dreisatzaufgaben** unterscheiden wir **drei Sätze:**
einen **Bedingungssatz,** einen **Schlußsatz** und einen **Fragesatz;**
daher der Name **Dreisatzrechnung.**

Der Bedingungssatz
Er gibt Bedingungen an, die zum Lösen der Dreisatzaufgabe erforderlich sind;
er sagt uns also: **was wir wissen** **5 m Stoff kosten 60 DM**

Der Schlußsatz
wir schließen auf die Einheit **1 m Stoff kostet 12 DM**

Der Fragesatz
Er gibt an: **was wir wissen wollen** **7 m Stoff kosten ? DM**

Wir unterscheiden:

einen **einfachen Dreisatz** mit **geradem Verhältnis,**
einen **einfachen Dreisatz** mit **umgekehrtem Verhältnis,**
einen **zusammengesetzten Dreisatz.**

Der einfache Dreisatz
Er besteht nur aus **einer Aufgabe,** deren einzelne Glieder entweder in einem **geraden** oder in einem **umgekehrten Verhältnis** zueinander stehen.

Der zusammengesetzte Dreisatz
Er besteht aus **mehreren** einfachen **Dreisätzen,** deren einzelne Glieder **abwechselnd** in einem **geraden** oder in einem **umgekehrten Verhältnis** zueinander stehen.

Das gerade und das umgekehrte Verhältnis
Bei den Dreisatzaufgaben stehen

Arbeit und **Lohn** **Ware** und **Preis** **Menge** und **Gewicht** usw.

in einem bestimmten **Verhältnis.**

Beispiel zum geraden Verhältnis

7 Arbeiter verdienen 35 DM		
1 Arbeiter verdient 5 DM	—	**weniger** Arbeiter verdienen **weniger** Lohn
9 Arbeiter verdienen 45 DM	—	**mehr** Arbeiter verdienen **mehr** Lohn

Vermehrt sich die eine Größe, so vermehrt sich im gleichen Verhältnis auch die andere Größe.

Vermindert sich die eine Größe, so vermindert sich im gleichen Verhältnis auch die andere Größe.

Dieses Verhältnis der Größen zueinander nennen wir gerades Verhältnis.

Merken Sie:

Je mehr	**Arbeit**	**Ware**	**Menge**	**Zeit**
desto mehr	**Lohn**	**Geld**	**Gewicht**	**Leistung**
Je weniger	**Arbeit**	**Ware**	**Menge**	**Zeit**
desto weniger	**Lohn**	**Geld**	**Gewicht**	**Leistung**

Kurz: Je mehr — desto mehr **je weniger — desto weniger**
gerades Verhältnis

Beispiel zum umgekehrten Verhältnis

7 Arbeiter benötigen 5 Tage		
1 Arbeiter benötigt 35 Tage	—	**weniger** Arbeiter benötigen **mehr** Tage
5 Arbeiter benötigen 7 Tage	—	**mehr** Arbeiter benötigen **weniger** Tage

Vermehrt sich die eine Größe, so **vermindert** sich im gleichen Verhältnis die andere Größe.

Vermindert sich die eine Größe, so **vermehrt** sich im gleichen Verhältnis die andere Größe.

Dieses Verhältnis der Größen zueinander nennen wir **umgekehrtes** Verhältnis.

Merken Sie:

Je mehr	**Zeit**	**Arbeiter**	**Verbrauch**
desto weniger	**Arbeiter**	**Zeit**	**reicht der Vorrat**
Je weniger	**Zeit**	**Arbeiter**	**Verbrauch**
desto mehr	**Arbeiter**	**Zeit**	**reicht der Vorrat**

Kurz: Je mehr — desto weniger **je weniger — desto mehr**

umgekehrtes Verhältnis

7.2. Der einfache Dreisatz mit geradem Verhältnis

Beim einfachen Dreisatz mit geradem Verhältnis schließen wir von der **bekannten Mehrheit** über die **Einheit** auf eine **unbekannte Mehrheit.**

Aufgabe:

Wieviel kosten 5 m Stoff, wenn 3 m 36 DM kosten?

Lösung der Aufgabe:

Jede **Dreisatzaufgabe** besteht aus zwei Teilen, aus einem **Ansatz** und aus einer **Ausrechnung am Bruchstrich.**

Der Ansatz

Der Ansatz besteht aus zwei Sätzen:

1. Satz: Was wir wissen	3 m Stoff kosten **36 DM**
2. Satz: Was wir wissen wollen	5 m Stoff kosten **? DM**

Unter den Ansatz machen wir einen **Strich.**

Der **Aufbau des Ansatzes** ist **sehr wichtig.**

Von der **richtigen Aufstellung des Ansatzes** hängt die **richtige Lösung der Aufgabe** ab.

Die **Glieder mit gleicher Benennung** gehören **untereinander:**
also: DM unter DM m unter m Tage unter Tage usw.

Die **gesuchte Größe** (hier DM) steht **am Ende des 1. Satzes.**

Das **Fragezeichen** steht immer **am Ende des 2. Satzes.**

Die Ausrechnung

Die Ausrechnung besteht aus drei Sätzen:

1. Satz: Was wir wissen	3 m Stoff kosten **36 DM**
2. Satz: Wir schließen auf die Einheit	1 m Stoff kostet 36 : 3 = **12 DM**
3. Satz: Was wir wissen wollen	5 m Stoff kosten 5 · 12 = **60 DM**

Die Ausrechnung am Bruchstrich:

3 m Stoff kosten **36 DM**	— die **36 DM**	kommen **auf** den Bruchstrich
1 m Stoff kostet **den 3. Teil**	— die **3**	kommt **unter** den Bruchstrich
5 m Stoff kosten **5 × soviel**	— die **5**	kommt **auf** den Bruchstrich

Der Bruchstrich lautet also:

$$\frac{36\ \text{DM} \cdot 5}{3} \quad \text{gekürzt} = \mathbf{60\ DM}$$

Also kosten 5 m Stoff $\underline{\underline{\textbf{60 DM}}}$

Merken Sie:

Die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, kommt stets vorne auf den Bruchstrich.

Zahlen, die multipliziert werden, kommen auf den Bruchstrich.

Zahlen, durch die dividiert wird, kommen unter den Bruchstrich.

7.2.1. Die Dreisatzrechnung mit Dezimalbrüchen

Aufgabe:

Wieviel kosten 5,2 kg Kaffee, wenn 3,5 kg Kaffee 42 DM kosten?

Ansatz:

3,5 kg Kaffee kosten **42 DM**
5,2 kg Kaffee kosten **? DM**

Ausrechnung:

3,5 kg Kaffee kosten **42 DM**	—	**auf** den Bruchstrich
1 kg Kaffee kostet **den 3,5ten Teil**	—	**unter** den Bruchstrich
5,2 kg Kaffee kosten **5,2 × soviel**	—	**auf** den Bruchstrich

Bruchstrich:

$$\frac{42\ \text{DM} \cdot 5{,}2}{3{,}5} \quad \text{gekürzt} = \mathbf{62{,}40\ DM}$$

Also kosten 5,2 kg Kaffee **62,40 DM**

Merken Sie:

Auch bei Dreisatzaufgaben mit Dezimalbrüchen kommt die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, stets vorne auf den Bruchstrich.

Dezimalbrüche, die multipliziert werden, kommen auf den Bruchstrich.

Dezimalbrüche, durch die dividiert wird, kommen unter den Bruchstrich.

7.2.2. Die Dreisatzrechnung mit gewöhnlichen Brüchen

Aufgabe:

Wieviel kosten $2\frac{1}{5}$ m Stoff, wenn $3\frac{1}{2}$ m 35 DM kosten?

Ansatz:

$3\frac{1}{2}$ **m** Stoff kosten **35 DM**

$2\frac{1}{5}$ **m** Stoff kosten **? DM**

Ausrechnung:

Um von $3\frac{1}{2}$ m auf $2\frac{1}{5}$ zu kommen, schließen wir:

von $3\frac{1}{2}$ m auf $\frac{1}{2}$ m — von $\frac{1}{2}$ m auf 1 m

von 1 m auf $\frac{1}{5}$ m — von $\frac{1}{5}$ m auf $2\frac{1}{5}$ oder $\frac{11}{5}$ m

$3\frac{1}{2}$ m Stoff kosten **35 DM**	—	**auf** den Bruchstrich
$\frac{1}{2}$ m Stoff kostet **den 7. Teil**	—	**unter** den Bruchstrich
1 m Stoff kostet **2 × soviel**	—	**auf** den Bruchstrich
$\frac{1}{5}$ m Stoff kostet **den 5. Teil**	—	**unter** den Bruchstrich
$2\frac{1}{5}$ m Stoff kosten **11 × soviel**	—	**auf** den Bruchstrich

Bruchstrich:

$$\frac{35\ \text{DM} \cdot 2 \cdot 11}{7 \cdot 5} \quad \text{gekürzt} = \mathbf{22\ DM}$$

Also kosten $2\frac{1}{5}$ m Stoff **22 DM**

Merken Sie:

Auch bei Dreisatzaufgaben mit gewöhnlichen Brüchen kommt die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, stets vorne auf den Bruchstrich.

Gewöhnliche Brüche, die multipliziert werden kommen auf den Bruchstrich

Gewöhnliche Brüche, durch die dividiert wird, kommen unter den Bruchstrich.

7.2.3. Die Schreibweise gewöhnlicher Brüche am Bruchstrich

Gemischte Zahlen und **gewöhnliche Brüche** dürfen **am Bruchstrich nicht** als **Brüche** erscheinen, da wir sonst mehrere Bruchstriche am Bruchstrich haben.

Der **Bruchstrich der vorigen Aufgabe** darf also **nicht** lauten:

$$\frac{35\ \text{DM} \cdot 2\frac{1}{5}}{3\frac{1}{2}} \quad \text{sondern:} \quad \frac{35\ \text{DM} \cdot 2 \cdot 11}{7 \cdot 5}$$

Erklärung:

Wir verwandeln die **gemischte Zahl** $2\frac{1}{5}$ in den **unechten Bruch** $\frac{11}{5}$, der nun als $\frac{11}{5}$ **am Bruchstrich** erscheint.
Wir verwandeln die **gemischte Zahl** $3\frac{1}{2}$ in den **unechten Bruch** $\frac{7}{2}$;
da wir aber **durch** den Bruch $\frac{7}{2}$ **dividieren** sollen,
müssen wir **mit dem umgekehrten Bruch multiplizieren.**
Der **Bruch** $\frac{7}{2}$ erscheint also **am Bruchstrich** als $\frac{2}{7}$.

Anmerkung:
Beim **Rechnen am Bruchstrich** ist das **Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen vorteilhafter als** das **Rechnen mit Dezimalbrüchen,** da das **Kürzen** der gewöhnlichen Brüche **einfacher** ist. Alle Dreisatzaufgaben dieses Buches sind deshalb auf die **gewöhnliche Bruchrechnung** abgestellt.

122. In 3 Minuten verlädt ein Arbeiter 48 Pakete. Welche Arbeitsleistung wird in 10 Minuten erbracht?

123. Ein D-Zug legt in $3\frac{3}{4}$ Stunden 450 km zurück. Wieviel km legt der D-Zug in einer Stunde zurück?

124. Ein Bauplatz von 4,5 a kostet 20 250 DM. Wie teuer ist ein gleichwertiger Platz von $3\frac{1}{5}$ a?

125. Von $4\frac{1}{2}$ Morgen Wiesenland erntet ein Bauer 120 dz Heu. Wieviel t Heu darf der Bauer von einer gleichwertigen Wiese von $10\frac{1}{2}$ Morgen erwarten?

126. A, B und C beziehen gemeinsam $12\frac{1}{2}$ kg Dauerwurst zum Preise von 195,— DM. A nimmt $5\frac{1}{2}$ kg, B $4\frac{1}{4}$ kg, C den Rest. Wieviel hat jeder zu zahlen?

127. Der durchschnittliche Benzinverbrauch je 100 km beträgt bei einem LKW 24 l, bei einem PKW 10 l und bei einem Motorrad 4 l. Wieviel l Benzin benötigt a) ein LKW für 485 km, b) ein PKW für 625 km, c) ein Motorrad für 365 km?

128. Ein Omnibus fährt in 1 Stunde 45 km. Wieviel km legt er bei gleichbleibender Geschwindigkeit in 3 Stunden 20 Minuten zurück?

129. Von einem Kabelgraben werden in 27 Tagen 1 215 m fertiggestellt. Wieviel m werden in 15 Tagen fertig?

130. Bei einem Stromverbrauch von 48 kWh wurden einschließlich 4,20 DM Grundgebühr im Monat Januar 8,04 DM gezahlt. Wieviel ist im Februar bei einem Stromverbrauch von 54 kWh zu zahlen?

131. Ein Schneider benötigt zu einem Herrenanzug 3,3 m Stoff, zu einem Knabenanzug $2\frac{1}{3}$ m. Der Preis für beide Anzugstoffe beträgt 239,98 DM. Für Macherlohn berechnet der Schneider je Anzug 125 DM. Wieviel kostet a) der Herrenanzug, b) der Knabenanzug?

7.3. Der einfache Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis

Auch beim **einfachen Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis** schließen wir von der **bekannten Mehrheit** über die **Einheit** auf eine **unbekannte Mehrheit.**

Aufgabe:

6 Arbeiter werfen einen Graben in 10 Tagen aus.
Wieviel Tage brauchen 5 Arbeiter?

Ansatz:

1. Satz: Was wir wissen	6 Arbeiter benötigen 10 Tage
2. Satz: Was wir wissen wollen	5 Arbeiter benötigen ? Tage

Ausrechnung:

6 Arbeiter benötigen **10 Tage**	—	**auf** den Bruchstrich
1 Arbeiter benötigt **nicht den 6. Teil,**		
sondern **6 × soviel** Zeit	—	**auf** den Bruchstrich
5 Arbeiter benötigen **nicht 5 × soviel,**		
sondern nur **den 5. Teil** an Zeit	—	**unter** den Bruchstrich

Es ist hier **umgekehrt** wie bei den Aufgaben mit geradem Verhältnis, deshalb nennen wir dieses Verhältnis **umgekehrtes Verhältnis.**

Bruchstrich:

$$\frac{10 \text{ Tage} \cdot 6}{5} \quad \text{gekürzt} = 12$$

Also brauchen 5 Arbeiter **12 Tage**

Merken Sie:

Auch beim einfachen Dreisatz mit umgekehrtem Verhältnis kommt die Zahl, die im Ansatz am Ende des 1. Satzes steht, stets vorne auf den Bruchstrich.

Zahlen, die multipliziert werden, kommen auf den Bruchstrich.

Zahlen, durch die dividiert wird, kommen unter den Bruchstrich.

132. 10 Mechaniker richten eine Nebenstellenanlage in 14 Tagen ein. Wieviel Tage brauchen 7 Mechaniker?

133. In wieviel Stunden entladen 26 Arbeiter einen Paketpostzug, wenn 16 Arbeiter dazu $6\frac{1}{2}$ Stunden brauchen?

134. Wenn jemand täglich 10 DM ausgibt, reicht sein Geld für 15 Tage. Wie lange reicht es bei einer täglichen Ausgabe von 12,50 DM?

135. Bei einem täglichen Verbrauch von $2\frac{1}{2}$ Zentnern Koks reicht ein Kellervorrat 5 Monate. Wie lange reicht der Vorrat bei einem Tagesverbrauch von 3 Zentnern?

136. Ein Kraftfahrer legt mit einem PKW bei einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 60 km/h die Strecke Duisburg — Köln in 66 Minuten zurück. Mit welcher Geschwindigkeit muß er fahren, wenn er in 55 Minuten in Köln sein will?

137. 4 Arbeiter schachten einen Kabelgraben in 12 Tagen aus. Wieviel Arbeiter muß der Bauführer einsetzen, wenn der Kabelgraben in 8 Tagen fertig sein soll?

138. Eine Arbeit ist in 6 Tagen fertig, wenn die tägliche Arbeitszeit 8 Stunden beträgt. Wie lange muß täglich gearbeitet werden, wenn die Arbeit schon in 4 Tagen fertig sein soll?

139. 8 Rohrleitungen leeren ein Tankschiff in 24 Stunden. In wieviel Stunden ist das Tankschiff geleert, wenn 4 Leitungen mehr angeschlossen werden?

140. Ein Rohr, das in der Minute 1,25 hl Wasser zuführt, füllt ein Becken in 18 Stunden. In welcher Zeit ist das Becken gefüllt, wenn das Rohr $1\frac{1}{2}$ hl zuführt?

141. Eine Erdkabellinie wird von 180 Arbeitern in 72 Tagen gebaut. a) Wieviel Arbeiter sind notwendig, wenn die Kabellinie in 60 Tagen fertig sein soll? b) In wieviel Tagen wäre das Erdkabel verlegt, wenn ein Drittel der Arbeiter mehr eingesetzt würde?

7.4. Der zusammengesetzte Dreisatz

Der zusammengesetzte Dreisatz besteht aus **mehreren einfachen Dreisätzen**, die **einzeln nacheinander gerechnet** werden.

Während **im einfachen Dreisatz** immer **3 Glieder gegeben** sind, um das unbekannte **4. Glied** zu suchen, sind **im zusammengesetzten Dreisatz 5 oder 7 Glieder gegeben**, um das unbekannte **6. oder 8. Glied** zu errechnen.

Aufgabe:

Wieviel verdienen 3 Arbeiter in 8 Tagen bei täglich 7stündiger Arbeitszeit, wenn 7 Arbeiter in 6 Tagen bei täglich 8stündiger Arbeitszeit 280 DM verdienen?

Ansatz:

7 Arbeiter verdienen in 6 Tagen bei 8stündiger Arbeitszeit 280 DM
3 Arbeiter verdienen in 8 Tagen bei 7stündiger Arbeitszeit ? DM

Ausrechnung:

Die Tage und die Arbeitszeit bleiben vorerst unberücksichtigt.

7 Arbeiter verdienen 280 DM	(**auf** den Bruchstrich)	$= 280$
1 Arbeiter **den 7. Teil** davon	(**unter** den Bruchstrich)	$= \frac{280}{7}$
3 Arbeiter **3 × soviel** wie einer	(**auf** den Bruchstrich)	$= \frac{280 \cdot 3}{7}$

Nun werden die Tage berücksichtigt.

In 6 Tagen verdienen 3 Arbeiter		$= \frac{280 \cdot 3}{7}$
In 1 Tag **den 6. Teil** davon	(**unter** den Bruchstrich)	$= \frac{280 \cdot 3}{7 \cdot 6}$
In 8 Tagen **8 × soviel** wie an 1 Tag	(**auf** den Bruchstrich)	$= \frac{280 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6}$

Nun wird die Arbeitszeit berücksichtigt.

Bei 8stündiger Arbeitszeit verdienen 3 Arbeiter in 8 Tagen		$= \frac{280 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6}$
Bei 1st. Arbeitszeit **den 8. Teil**	(**unter** den Bruchstrich)	$= \frac{280 \cdot 3 \cdot 8}{7 \cdot 6 \cdot 8}$
Bei 7st. Arbeitszeit **7 × soviel**	(**auf** den Bruchstrich)	$= \frac{280 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 8}$

Bruchstrich: $\dfrac{280\text{ DM} \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{7 \cdot 6 \cdot 8}$ gekürzt = **140 DM**

Also verdienen 3 Arbeiter in 8 Tagen bei 7stündiger Arbeitszeit **140 DM**

Merken Sie:

In der vorstehenden Aufgabe haben wir nur einfache Dreisätze mit **geradem Verhältnis.**

Es gibt auch Aufgaben, die nur einfache Dreisätze mit **umgekehrtem Verhältnis** haben, und zusammengesetzte Dreisatzaufgaben, in denen **beide Verhältnisse abwechselnd** vorkommen.

Es ist also bei jeder Teilaufgabe zuerst das Verhältnis festzustellen!

Angewandte Aufgaben

142. 3 Arbeiter verladen in 4 Minuten 192 Pakete. Wieviel Pakete verladen 10 Arbeiter in 20 Minuten?

143. Wieviel verdienen 16 Arbeiter in 15 Tagen bei täglich 7stündiger Arbeitszeit, wenn 25 Arbeiter in 12 Tagen bei 8stündiger Arbeitszeit 12 240 DM verdienen?

144. Bei täglich 8stündiger Arbeitszeit verlegen 12 Arbeiter ein Kabel in 21 Tagen. Wieviel Tage benötigen hierfür 10 Arbeiter bei täglich 9stündiger Arbeitszeit?

145. Ein Landwirt verfüttert wöchentlich an 5 Pferde 140 kg Hafer. Er verkauft 2 Pferde. Wieviel Tage reicht nun noch ein Vorrat von 24 dz?

146. 6 Textilarbeiter weben bei täglich 8stündiger Arbeitszeit in 7 Arbeitstagen 624 m Leinen. Wieviel m weben 8 Textilarbeiter in 12 Tagen, wenn sie täglich nur 7 Stunden arbeiten?

147. Mit 7 Lastwagen, die täglich je 5 Fahrten ausführen, kann man einen Schleppkahn Kohlen in 4 Tagen entladen. Wieviel Lastwagen werden benötigt, wenn jeder Wagen täglich 2 Fahrten mehr machen soll und der Schleppkahn schon in 2 Tagen geleert sein muß?

148. Der Dachstuhl eines Hauses wird gerichtet. Bei täglich 8stündiger Arbeitszeit arbeiten 3 Zimmerleute 18 Tage daran. Wie lange arbeiten 4 Zimmerleute, wenn sie täglich 1 Überstunde machen?

149. Ein Kabelgraben von 1 200 m Länge, 0,6 m Breite und 1,5 m Tiefe wird in einer gewissen Zeit von 24 Arbeitern ausgehoben. Wieviel Arbeiter hat man nötig, um in derselben Zeit einen Kanal von 1 800 m Länge, 0,8 m Breite und 2,5 m Tiefe zu bauen?

150. 30 Eisenbahnwagen mit Kohle von je 15 t Inhalt werden beim Einsatz von 5 Lastwagen in 3 Tagen entladen. Wieviel Lastwagen sind nötig, wenn 45 Eisenbahnwagen zu 20 t in 5 Tagen ausgeladen werden sollen?

151. Wenn 6 Arbeiter bei täglich 9stündiger Arbeitszeit in 5 Tagen einen Graben von 50 m Länge, 4,5 m Breite und 2,5 m Tiefe ausheben, wieviel Arbeiter sind dann nötig, um bei täglich 8stündiger Arbeitszeit in 6 Tagen einen 60 m langen, 5 m breiten und 3 m tiefen Graben auszuheben?

7.5. Lösung der Dreisatzaufgaben nach der Formel

Bei der **Dreisatzrechnung** ist die Aufstellung des Bruchstriches sehr wichtig; denn von der **richtigen Aufstellung des Bruchstriches** hängt die **richtige Lösung der Aufgabe ab.**

Erfahrungsgemäß werden bei der **Dreisatzrechnung,** besonders bei den **zusammengesetzten Dreisatzaufgaben mit geradem und umgekehrtem Verhältnis,** die **Zahlenwerte am Bruchstrich** sehr oft **verwechselt,** so daß Zahlenwerte, die **auf dem Bruchstrich** stehen müssen, **unter den Bruchstrich** gesetzt oder umgekehrt Zahlenwerte, die **unter dem Bruchstrich** stehen müssen, **auf den Bruchstrich** gesetzt werden. Das **Ergebnis** der Aufgabe muß dann natürlich **falsch** sein.

Um denen, die bei der **Aufstellung des Bruchstriches** Schwierigkeiten haben, zu helfen, werden als **Gedächtnisstütze** die folgenden **„Formeln"** gegeben; sie sollen (besonders bei Prüfungen) eine Hilfe sein, wenn die **denkmäßige Lösung** der Aufgabe **nicht** gelingen will.

7.5.1. Schematische Darstellung

gerades Verhältnis	**umgekehrtes Verhältnis**
Der Ansatz	
$\boxed{2}$ 5 Arbeiter verdienen 90 DM $\boxed{1}$	$\boxed{2}$ 3 Arbeiter brauchen 15 Tage $\boxed{1}$
$\boxed{3}$ 7 Arbeiter verdienen ? DM	$\boxed{3}$ 5 Arbeiter brauchen ? Tage
Der Bruchstrich	
$\dfrac{\overset{\boxed{1}}{90\text{ DM}} \cdot \overset{\boxed{3}}{7}}{\underset{\boxed{2}}{5}} = 126\text{ DM}$	$\dfrac{\overset{\boxed{1}}{15\text{ Tage}} \cdot \overset{\boxed{2}}{3}}{\underset{\boxed{3}}{5}} = 9\text{ Tage}$

Erklärung:

Wenn wir in den vorstehenden Ansätzen

dem **Glied am Ende des 1. Satzes** die **Nummer** $\boxed{1}$

dem **Glied am Anfang des 1. Satzes** die **Nummer** $\boxed{2}$

dem **Glied am Anfang des 2. Satzes** die **Nummer** $\boxed{3}$ **geben,**

dann stellen wir nach längerer Übung der Dreisatzrechnung, bei der wir die Bruchstriche verstandesmäßig aufgestellt haben, fest, daß **die einzelnen Glieder des Dreisatzes immer in einer bestimmten Reihenfolge** erscheinen.

7.5.2. Die Aufstellung des Bruchstriches beim einfachen Dreisatz

Beim geraden Verhältnis erscheinen die drei bekannten Glieder des Ansatzes am Bruchstrich in folgender Reihenfolge:

Die **Nummer** $\boxed{1}$ erscheint **auf** **dem Bruchstrich**
Die **Nummer** $\boxed{2}$ erscheint **unter dem Bruchstrich**
Die **Nummer** $\boxed{3}$ erscheint **auf** **dem Bruchstrich**

also: $\dfrac{\boxed{1} \cdot \boxed{3}}{\boxed{2}}$

Beim umgekehrten Verhältnis erscheinen die drei bekannten Glieder des Ansatzes **in umgekehrter Reihenfolge** (daher der Name):

Die **Nummer** $\boxed{1}$ erscheint **auf** dem Bruchstrich
Die **Nummer** $\boxed{2}$ erscheint **auf** dem Bruchstrich
Die **Nummer** $\boxed{3}$ erscheint **unter** dem Bruchstrich

also: $\dfrac{\boxed{1} \cdot \boxed{2}}{\boxed{3}}$

Erklärung:

Beim geraden Verhältnis nehmen wir als **Gedächtnisstütze** den kleinen Buchstaben **g**, den Anfangsbuchstaben von „gerades Verhältnis“.

Die **Nummer** $\boxed{1}$ setzen wir **immer vorne auf den Bruchstrich.**

Von der **Nummer** $\boxed{1}$ aus ziehen wir nun (wie beim Schreiben des Buchstabens g — siehe Zeichnung!) eine **Rundschleife nach unten** und setzen **unter den Bruchstrich** die **Nummer** $\boxed{2}$.

Sodann folgen wir der **Rundschleife** weiter **nach oben** und setzen **auf den Bruchstrich** die **Nummer** $\boxed{3}$.

Für die Nummern $\dfrac{\boxed{1} \cdot \boxed{3}}{\boxed{2}}$ setzen wir nun **die Zahlenwerte des Ansatzes** **auf** bzw. **unter** den Bruchstrich.

Das **Ergebnis** muß bei fehlerloser Ausrechnung **richtig** sein.

Beim umgekehrten Verhältnis nehmen wir als **Gedächtnisstütze** den Buchstaben **u**, den Anfangsbuchstaben von „umgekehrtes Verhältnis“.

Die **Nummer** $\boxed{1}$ setzen wir wieder **vorne auf den Bruchstrich.**

Von der **Nummer** $\boxed{1}$ aus ziehen wir nun die Rundschleife in **umgekehrter** Richtung (wir können auch sagen: im **Uhrzeigersinne**).

Die Rundschleife verbleibt zunächst noch **auf dem Bruchstrich** (siehe Zeichnung!), und wir setzen hier die **Nummer** $\boxed{2}$ **neben** die **Nummer** $\boxed{1}$.

Sodann folgen wir der **Rundschleife** weiter **nach unten** und setzen **unter den Bruchstrich** die **Nummer** 3.

Für die Nummern $\dfrac{\boxed{1} \cdot \boxed{2}}{\boxed{3}}$ setzen wir nun **die Zahlenwerte des Ansatzes auf** bzw. **unter** den Bruchstrich.

Das **Ergebnis** muß bei fehlerloser Ausrechnung wieder **richtig** sein.

7.5.3. Die Aufstellung des Bruchstriches beim zusammengesetzten Dreisatz

Auch beim **zusammengesetzten Dreisatz** erhalten die einzelnen Teile des Ansatzes eine **Nummer.**

$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{2}$	$\boxed{1}$
6 Wagen	mit je 15 t werden von	3 Arbeitern in	2 Tagen entladen.
5 Wagen	mit je 20 t werden von	4 Arbeitern in	? Tagen entladen.
$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	$\boxed{3}$	

Erklärung:

Das Glied am Ende des 1. Satzes erhält die Nummer $\boxed{1}$

alle übrigen Glieder des 1. Satzes erhalten die Nummer $\boxed{2}$

alle Glieder des 2. Satzes erhalten die Nummer $\boxed{3}$

Die **Nummer** $\boxed{1}$ erscheint beim zusammengesetzten Dreisatz **nur einmal**, während die **Anzahl der Nummern** $\boxed{2}$ **und** $\boxed{3}$ der **Anzahl der Teilaufgaben** entspricht.

7.5.4. Aufstellung des Bruchstriches nach der Formel

Zur vorstehenden Aufgabe fertigen wir ein **Schaubild des Ansatzes** an:

$$\begin{array}{ccccccc} g & & g & & u & & \\ \boxed{2} & & \boxed{2} & & \boxed{2} & & \boxed{1} \\ 6\text{ W.} & — & 15\text{ t} & — & 3\text{ A.} & — & 2\text{ T.} \\ 5\text{ W.} & — & 20\text{ t} & — & 4\text{ A.} & — & ?\text{ T.} \\ \hline \boxed{3} & & \boxed{3} & & \boxed{3} & & \end{array}$$

Erklärung:

Die vorstehende Dreisatzaufgabe besteht aus **drei Teilaufgaben.**

Wir bestimmen zuerst das Verhältnis der Teilaufgaben.

1. Teilaufgabe:

Je **weniger** Wagen — desto **weniger** Tage
gerades Verhältnis — **g-Formel**

2. Teilaufgabe:

Je **mehr** t — desto **mehr** Tage
gerades Verhältnis — **g-Formel**

3. Teilaufgabe:

Je **mehr** Arbeiter — desto **weniger** Tage
umgekehrtes Verhältnis — **u-Formel**

Die Formelbuchstaben g und **u** setzen wir **im Schaubild** des Ansatzes **über die einzelnen Teilaufgaben.**

Nun fertigen wir ein **Schaubild des Bruchstriches** an:

$$\begin{array}{c|c|c|l} 1. & 2. & 3. & \text{Teilaufgabe} \\ \boxed{1}\;\cdot\;\boxed{3} & \cdot\;\boxed{3} & \cdot\;\boxed{2} & \\ \hline \boxed{2} & \boxed{2} & \boxed{3} & \end{array}$$

und setzen für die **Nummern** die **Zahlenwerte** ein:

$$\frac{2\text{ T.}\cdot 5\cdot 20\cdot 3}{6\cdot 15\cdot 4} \qquad \text{gekürzt} = \underline{\underline{1\tfrac{2}{3}\text{ Tage}}}$$

Erklärung:

1. Teilaufgabe:

6 Wagen werden in 2 Tagen entladen
5 Wagen werden in ? Tagen entladen

Nach der **g-Formel** lautet der Bruchstrich: $\dfrac{2\text{ Tage}\cdot 5}{6}$

Dieser Teil des Bruchstriches ist bereits die **Nummer** $\boxed{1}$ für die

2. Teilaufgabe:

Für 15-t-Wagen benötigen 5 Arbeiter $\dfrac{2\cdot 5}{6}$ Tage
Für 20-t-Wagen benötigen 5 Arbeiter ? Tage

Da die **Nummer** $\boxed{1}$ für die 2. Teilaufgabe bereits vorliegt, brauchen nur die **Nummern** $\boxed{2}$ **und** $\boxed{3}$ **hinzugefügt** zu werden, und zwar, da das **gerade Verhältnis** vorliegt, nach der **g-Formel.**

Der Bruchstrich lautet nun: $\dfrac{2\text{ Tage}\cdot 5\cdot 20}{6\cdot 15}$

Dieser Teil des Bruchstriches ist nun die **Nummer** $\boxed{1}$ für die

3. Teilaufgabe:

3 Arbeiter brauchen für 5 Wagen mit je 20 t $\dfrac{2\cdot 5\cdot 20}{6\cdot 15}$ Tage
4 Arbeiter brauchen für 5 Wagen mit je 20 t ? Tage

Da nun schon für die 3. Teilaufgabe die **Nummer** $\boxed{1}$ vorliegt, brauchen wieder nur die **Nummern** $\boxed{2}$ **und** $\boxed{3}$ **hinzugefügt** zu werden, diesmal, da es sich um ein **umgekehrtes Verhältnis** handelt, nach der **g-Formel.**

Der gesamte Bruchstrich lautet nun:

$$\frac{2\text{ Tage}\cdot 5\cdot 20\cdot 3}{6\cdot 15\cdot 4} \qquad \text{gekürzt} = \frac{5}{3}\text{ oder } \underline{\underline{1\tfrac{2}{3}\text{ Tage}}}$$

Dreisatzrechnung nach der Formel

Lösungsweg:

1. **Lesen Sie aufmerksam die gegebene Aufgabe!**
   Achten Sie auf die gestellte **Frage**!

2. **Bilden Sie den richtigen Ansatz!**
   Stellen Sie das **Verhältnis der Teilaufgaben** und die **Art der Formel** fest! **g- oder u-Formel?**

3. **Stellen Sie den Bruchstrich auf!**
   Fertigen Sie ein **Schaubild des Bruchstriches** an!
   Setzen Sie für die **Nummern** die **Zahlenwerte des Ansatzes** ein!

4. **Rechnen Sie den Bruchstrich aus!**
   Sie haben dann das **Ergebnis.**

7.6. Zusammenfassung und Wiederholung

Angewandte Aufgaben

152. 5 Bauarbeiter verdienen täglich 179,20 DM. Wieviel verdienen a) 3 Arbeiter in 2 Tagen, b) 7 Arbeiter in 4 Tagen?

153. Für den Bau einer Bahnstrecke sind 42 372 Schienen von je 16 m Länge erforderlich. Wieviel Schienen von je 22 m Länge werden benötigt?

154. 5 Arbeiter erhalten für 8 Tage 1 536 DM Lohn. Wieviel Lohn erhalten unter gleichen Bedingungen 7 Arbeiter in 6 Tagen?

155. $12\frac{1}{4}$ m Kleiderstoff kosten 88,20 DM. Wie teuer sind $3\frac{1}{4}$ m?

156. Bei einer Autofahrt wurden 8 l Benzin verbraucht. Für 30 l hatte der Fahrer 19,80 DM bezahlt. Wieviel kostete der Brennstoff für die Fahrt?

157. Eine Tankstelle rechnet mit einem täglichen Verkauf von 2 400 l Benzin und kommt dann mit ihrem Vorrat 49 Tage aus. Wie lange reicht der Vorrat bei einer täglichen Abgabe von 2 100 l?

158. Ein Wanderer legt 3 km in 51 Minuten zurück. Wieviel Zeit benötigt er für 10 km?

159. Eine Firma zahlt an 5 Arbeiter für je 8 Arbeitsstunden zusammen 182 DM Lohn. An einem Tag erschienen nur 4 Arbeiter, außerdem mußte die Arbeit nach 6 Stunden wegen schlechter Witterung eingestellt werden. Wieviel Lohn muß die Firma für diesen Tag zahlen?

160. In 3 Tagen verdienen 5 Näherinnen 508,80 DM. Wieviel verdienen 8 Näherinnen in 14 Tagen?

161. 8 Pflasterer stellen eine Straße in 30 Tagen fertig. Wie lange brauchen bei gleicher Leistung 10 Pflasterer?

162. 4 Verkäuferinnen verdienen bei gleichem Lohn in 6 Tagen 230,40 DM. In der Osterwoche wurden unter gleichen Bedingungen an 5 Tagen 2 weitere Verkäuferinnen zur Aushilfe eingestellt. Wieviel Lohn mußte die Firma in dieser Woche zahlen?

163. Am Lohntag sind zu entlöhnen: a) 6 Arbeiter mit je 42, b) 4 Arbeiter mit je 32 und c) 3 Arbeiter mit je 26 Arbeitsstunden. An einem Tage verdienen 4 Arbeiter in 8 Stunden zusammen 179,20 DM. Wieviel Lohn erhält jede Arbeitsgruppe?

8. Die Prozent- und Promillerechnung

8.1. Die Prozentrechnung

Die Prozentrechnung (Hundertrechnung) ist eine Dreisatzrechnung mit der feststehenden Zahl 100 ohne Berücksichtigung der Zeit.

Prozent (lat.: pro centum) bedeutet **für** oder **vom Hundert.**
Das **Zeichen für Prozent** ist %.

Gewinn und Verlust, Preissteigerungen und Preissenkungen, Lohn und Gehaltserhöhungen, Änderungen statistischer Zahlen usw. werden in % angegeben, um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu schaffen.

Der Kaufmann drückt den Gewinn (Verlust) in % aus.

Beispiel:

Mit **320 DM** gewinnt ein Kaufmann **48 DM**

Mit 1 DM gewinnt er 48 DM : 320 = 0,15 DM

Mit 100 DM gewinnt er 0,15 DM · 100 = 15 DM, also: $\underline{\underline{\textbf{15\%}}}$

Bei der **Prozentrechnung** erscheinen **drei Werte:**

Grundwert, Prozentwert und **Prozentsatz.**

Die 320 DM eingesetztes Kapital nennen wir den **Grundwert,**
die 48 DM Gewinn bezeichnen wir mit **Prozentwert,**
das Ergebnis vom Hundert ist der **Prozentsatz.**

Von diesen drei Werten sind stets **zwei Werte gegeben,** der **3. Wert** wird **gesucht:**

gegeben sind **Grundwert** und **Prozentsatz** — gesucht wird der **Prozentwert**
gegeben sind **Grundwert** und **Prozentwert** — gesucht wird der **Prozentsatz**
gegeben sind **Prozentwert** und **Prozentsatz** — gesucht wird der **Grundwert**

Der Grundwert ist immer das Ganze oder 100%.

8.1.1. Feststehende Prozentsätze

Bei der **Prozent- und Zinsrechnung** gibt es **Prozentsätze, die immer wiederkehren.**

Diese **feststehenden Prozentsätze** sind:

$1\% = \frac{1}{100}$	$9\frac{1}{11}\% = \frac{1}{11}$	$33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$
$2\% = \frac{1}{50}$	$10\% = \frac{1}{10}$	$40\% = \frac{2}{5}$
$2\frac{1}{2}\% = \frac{1}{40}$	$11\frac{1}{9}\% = \frac{1}{9}$	$50\% = \frac{1}{2}$
$3\frac{1}{3}\% = \frac{1}{30}$	$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$	$60\% = \frac{3}{5}$
$4\% = \frac{1}{25}$	$14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$	$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$
$5\% = \frac{1}{20}$	$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$	$75\% = \frac{3}{4}$
$6\frac{2}{3}\% = \frac{1}{15}$	$20\% = \frac{1}{5}$	$80\% = \frac{4}{5}$
$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12}$	$25\% = \frac{1}{4}$	100% = das Ganze

Bei **Aufgaben mit feststehenden Prozentsätzen** rechnen wir den **Prozentwert in vereinfachter Form** aus, z. B.:

20% von 400 DM	=	$\frac{1}{5}$ von 400 DM	=	80 DM
80% von 500 DM	=	$\frac{4}{5}$ von 500 DM	=	400 DM
25% von 320 DM	=	$\frac{1}{4}$ von 320 DM	=	80 DM
75% von 600 DM	=	$\frac{3}{4}$ von 600 DM	=	450 DM
$33\frac{1}{3}\%$ von 450 DM	=	$\frac{1}{3}$ von 450 DM	=	150 DM
$12\frac{1}{2}\%$ von 480 DM	=	$\frac{1}{8}$ von 480 DM	=	60 DM

Prägen Sie sich die feststehenden Prozentsätze gut ein!

Rechnen Sie Aufgaben, die solche Prozentsätze haben, **in dieser Form** aus!

8.1.2. Wir berechnen den Prozentwert

1% = 1 von Hundert oder 1 v. H. oder **1 Prozent**

1% von 325 DM = **3,25 DM**	10% von 325 DM = **32,50 DM**
1% von 450 DM = **4,50 DM**	10% von 450 DM = **45,00 DM**
1% von 500 DM = **5,00 DM**	10% von 500 DM = **50,00 DM**

Merken Sie:

1% ist immer $\frac{1}{100}$ des Grundwertes;
das Komma wird zwei Stellen nach links gesetzt.
10% ist immer $\frac{1}{10}$ des Grundwertes;
das Komma wird eine Stelle nach links gesetzt.

1% von 235 DM = **2,35 DM**	2% von 235 DM = 2,35 DM · 2 = **4,70 DM**
1% von 360 DM = **3,60 DM**	$\frac{1}{2}$% von 360 DM = 3,60 DM : 2 = **1,80 DM**
1% von 400 DM = **4,00 DM**	$3\frac{1}{2}$% von 400 DM = 4,00 DM · 3,5 = **14,00 DM**

Merken Sie:

Man berechnet den Prozentwert eines Grundwertes,
indem man zuerst 1% des Grundwertes berechnet
und dann das Ergebnis mit dem Prozentsatz multipliziert.

Übungsaufgabe 164

Berechnen Sie die Prozentwerte!

a) 1% von
8 DM 36 DM 246 DM 370 DM 1 420 DM 2 654 DM

b) 10% von
2 000 DM 2 654 DM 5 600 DM 12 400 DM 48 670 DM 125 000 DM

c) 2%, 3% und 5% von
3 DM 18 DM 426 DM 3 475 DM 47 580 DM 136 427 DM

d) $\frac{1}{2}$%, $\frac{2}{3}$% und $\frac{3}{4}$% von
12 DM 48 DM 384 DM 7 584 DM 36 408 DM 403 320 DM

e) $1\frac{1}{2}$%, $2\frac{2}{3}$% und $3\frac{3}{4}$% von
60 DM 84 DM 672 DM 6 096 DM 42 864 DM 208 176 DM

f) 1% und 10% von
12,3 DM 5,7 hl 87,5 kg 0,7 m 65,7 t 43,5 km

g) Verwandeln Sie die Brüche in Prozentsätze!

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$

$\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{25}$ $\frac{1}{30}$ $\frac{1}{40}$ $\frac{1}{50}$ $\frac{1}{100}$

h) Drücken Sie die Prozentsätze durch Brüche aus!

80% 75% $66\frac{2}{3}$% 60% 50% 40% $33\frac{1}{3}$% 25% 20%

$12\frac{1}{2}$% 10% $6\frac{2}{3}$% 5% 4% $3\frac{1}{3}$% $2\frac{1}{2}$% 2% 1%

i) Berechnen Sie 50%, 25%, 20% von 400 DM!

k) Berechnen Sie $33\frac{1}{3}$%, $16\frac{2}{3}$% und $12\frac{1}{2}$% von 360 DM!

l) Berechnen Sie $8\frac{1}{3}$%, $66\frac{2}{3}$% und 75% von 480 DM!

8.1.2.1. Die Berechnung des Prozentwertes

Bei der Prozentrechnung unterscheiden wir einen **dreifachen Grundwert:**

einen **reinen Grundwert,**
einen **vermehrten Grundwert** und
einen **verminderten Grundwert.**

Erklärung:

Der **reine Grundwert** ist stets **100%.**

Grundwert plus Aufschlag (Gewinn) ergeben den **vermehrten Grundwert,** d. h., bei einem **Aufschlag** von **10%** ist der vermehrte Grundwert **110%.**

Grundwert minus Abschlag (Verlust) ergeben den **verminderten Grundwert,** d.h., bei einem **Abschlag** von **15%** ist der verminderte Grundwert **85%.**

Bei der **Berechnung des Prozentwertes** unterscheiden wir:

eine **Prozentrechnung vom Hundert,**
dann berechnen wir den **Prozentwert** vom **reinen Grundwert;**

eine **Prozentrechnung auf Hundert,**
dann schließen wir vom **vermehrten Grundwert** auf den **Grundwert;**

eine **Prozentrechnung im Hundert,**
dann schließen wir vom **verminderten Grundwert** auf den **Grundwert.**

Die Prozentrechnung vom Hundert (Rechnung mit dem reinen Grundwert)

Gegeben sind der **Grundwert** und der **Prozentsatz;**
gesucht wird der **Prozentwert.**

Aufgabe: An 360 DM **(Grundwert)** gewinnt man 5% **(Prozentsatz).**

Berechnen Sie den **Prozentwert!**

Ausrechnung:

Der **Grundwert** (100%) ist **360 DM** — **auf** den Bruchstrich = $\frac{360}{}$

1% ist **der 100. Teil** davon — **unter** den Bruchstrich = $\frac{}{100}$

5% sind **5** × **soviel** — **auf** den Bruchstrich = $\frac{\ 5}{}$

Bruchstrich: $\frac{360 \text{ DM} \cdot 5}{100}$ gekürzt = 18 DM

Also beträgt der **Prozentwert** **18 DM**

Merken Sie:

Wir berechnen den Prozentwert vom Grundwert.

Wenn wir auf diese Weise „dreisatzmäßig" eine Reihe von Aufgaben lösen, dann stellen wir fest:

Auf dem Bruchstrich erscheinen stets der **Grundwert** und der **Prozentsatz,**
unter dem Bruchstrich steht immer die **Zahl 100.**

Regel: $\textbf{Prozentwert} = \frac{\textbf{Grundwert} \cdot \textbf{Prozentsatz}}{\textbf{100}}$

Wenn wir nun dem **Grundwert** (dem Kapital) den Formelbuchstaben **k**,
dem **Prozentsatz** den Formelbuchstaben **p**
und dem **Prozentwert** den Formelbuchstaben **z** geben,
dann heißt die Formel für die Berechnung des Prozentsatzes:

Formel: $z = \frac{k \cdot p}{100}$

Angewandte Aufgaben

165. Ein Beamter verdient monatlich 1 152 DM und gibt $16\frac{2}{3}$% für Miete aus. Wieviel beträgt die Monatsmiete?

166. Ein Haus, das 108 000 DM gekostet hat, bringt $6\frac{3}{4}$% Miete ein. Wie hoch ist der Mietertrag?

167. Ein Untermieter zahlte bislang 128 DM Miete im Monat; nach der Mieterhöhung zahlt er 15% mehr. Wieviel beträgt die neue Jahresmiete?

168. Kaffee verliert beim Rösten 18% des Gewichtes. Wieviel Kaffee behält man von 1 Zentner Rohkaffee nach dem Rösten?

169. Ein Landwirt erntet 48 dz Getreide, davon sind 62% Roggen. Berechnen Sie den Wert des Roggens, wenn 1 dz 45 DM kostet?

170. Ein Beamter mit einem Jahreseinkommen von 12 960 DM wird in den Ruhestand versetzt und erhält 75% als Ruhegehalt. Wieviel Ruhegehalt bekommt er monatlich?

171. Ein Angestellter mit einem Monatseinkommen von 975 DM spart für das Studium seiner Kinder monatlich $4\frac{1}{2}$%. Wieviel spart er in 18 Jahren?

172. Eine Firma hatte einen Jahresumsatz von 1 025 400 DM. Daran waren der Import mit 62,6% und der Export mit 37,4% beteiligt. Für wieviel DM wurde a) importiert, b) exportiert?

173. Ein Handelsvertreter erhält neben einem festen Gehalt von 480 DM $2\frac{1}{2}$% Provision vom Monatsumsatz. Dieser betrug im letzten Monat 54 702 DM. Wie groß war sein Monatseinkommen?

174. Ein Betrieb beschäftigt 880 Personen, davon sind 25% Jugendliche, 60% der Erwachsenen sind Männer, die übrigen sind Frauen. Die Belegschaft macht einen Ausflug, zu dem 75% der Männer ihre Ehefrauen mitnehmen. Wieviel Personen nehmen an dem Ausflug teil?

Die Prozentrechnung auf Hundert (Rechnung mit dem vermehrten Grundwert)

Gegeben sind **vermehrter Grundwert** und **Prozentsatz;**
gesucht wird der **Grundwert.**

Aufgabe: Der neue Preis **(vermehrter Grundwert)** beträgt 378 DM, der Aufschlag **(Prozentsatz)** beträgt 5%.

Berechnen Sie den alten Preis **(Grundwert)!**

Ausrechnung:

Der um 5% **vermehrte Grundwert** (100%) beträgt **105%.**

105% (vermehrter Grundwert) = **378 DM** — **auf** den Bruchstrich $= \frac{378}{\quad}$

1% ist der **105. Teil** davon — **unter** den Bruchstrich $= \frac{\quad}{105}$

100% sind **100** × **soviel** — **auf** den Bruchstrich $= \frac{100}{\quad}$

Bruchstrich: $\frac{378\ \text{DM} \cdot 100}{105}$ gekürzt = 360 DM

Also beträgt der **Grundwert** **360 DM**

Merken Sie:

Wir schließen vom vermehrten Grundwert auf den Grundwert.

Wir lösen auch hier dreisatzmäßig eine Reihe von Aufgaben und stellen als Regel fest:

Auf dem Bruchstrich erscheinen stets der **vermehrte Grundwert** und die **Zahl 100,**

unter dem Bruchstrich erscheint stets der **vermehrte Grundwert,** ausgedrückt **in%.**

$$\textbf{Regel:}\quad \text{Grundwert} = \frac{\text{vermehrter Grundwert} \cdot 100}{\text{vermehrter Grundwert in }\%}$$

Die **Formel** drücken wir so aus:

Grundwert = **G**

vermehrter Grundwert = **v. G.**

vermehrter Grundwert, ausgedrückt in % = **v. G.%**

$$\textbf{Formel:}\quad G = \frac{v.G. \cdot 100}{v.G.\ \%}$$

Angewandte Aufgaben

175. Nach einer Gehaltserhöhung von 6% erhält ein Beamter ein Monatsgehalt von 1 278,36 DM. Wie hoch waren die alten Bezüge?

176. Eine Aktentasche, die bei 35% Gewinnaufschlag mit 60,75 DM verkauft werden sollte, wurde wegen Räumung des Geschäfts zum Einkaufspreis abgegeben. Wieviel betrug der Einkaufspreis?

177. Der Monatsumsatz einer Firma ist im Juni um 7 $\frac{1}{2}$% auf 37 625 DM angestiegen. Wie groß war der Umsatz im Mai?

178. Die Werbe- und Reklamekosten einer Firma wurden für das neue Geschäftsjahr um 15% erhöht und betragen nun 3 910 DM. Berechnen Sie die Werbekosten des vergangenen Jahres!

179. Der Jahresumsatz eines Betriebes betrug 233 220 DM, d. i. 15% mehr als im Vorjahr. Berechnen Sie den vorjährigen Jahresumsatz!

180. Nach einer Anzahlung von 52,48 DM bezahlt jemand einen Kühlschrank in 12 Monatsraten von je 35 DM. Der Teilzahlungsaufschlag beträgt 12%. Wieviel hätte der Kühlschrank bei Barzahlung gekostet?

Die Prozentrechnung im Hundert (Rechnung mit dem verminderten Grundwert)

Gegeben sind **verminderter Grundwert** und **Prozentsatz;**
gesucht wird der **Grundwert.**

Aufgabe: Der neue Preis **(verminderter Grundwert)** beträgt 342 DM, der Abschlag **(Prozentsatz)** beträgt 5%.

Berechnen Sie den alten Preis **(Grundwert)!**

Ausrechnung:

Der um 5% **verminderte Grundwert** (100%) beträgt **95%**.

95% (verminderter Grundwert) = **342 DM** — **auf** den Bruchstrich = $\dfrac{342}{\quad}$

1% ist **der 95. Teil** davon — **unter** den Bruchstrich = $\dfrac{\quad}{95}$

100% sind **100** × **soviel** — **auf** den Bruchstrich = $\dfrac{100}{\quad}$

Bruchstrich: $\dfrac{342\ \text{DM} \cdot 100}{95}$ gekürzt = 360 DM

Also beträgt der **Grundwert 360 DM**

Merken Sie:

Wir schließen vom verminderten Grundwert auf den Grundwert.

Wir verfahren wie bei den Aufgaben mit vermehrtem Grundwert, setzen nur für den vermehrten den verminderten Grundwert ein und haben dann die Regel und die Formel:

Regel: $\text{Grundwert} = \dfrac{\text{verminderter Grundwert} \cdot 100}{\text{verminderter Grundwert in }\%}$

Formel: $G = \dfrac{\text{v.G.} \cdot 100}{\text{v.G. }\%}$

Angewandte Aufgaben

181. Nach Abzug von $2\frac{1}{2}$% wurden 331,50 DM auf ein Postscheckkonto überwiesen. Wie hoch war der Rechnungsbetrag?

182. Kaffee verliert beim Rösten 18%. Das Gewicht nach dem Rösten beträgt 295,20 kg. Berechnen Sie das Gewicht des Rohkaffees!

183. Ein neuer Motorroller wurde mit 15% Verlust für 2 040 DM weiterverkauft. Wieviel hatte der Motorroller gekostet?

184. Eine Schlafzimmereinrichtung wird wegen einer kleinen Beschädigung um $7\frac{1}{2}$% im Preis herabgesetzt und kostet nun 1 480 DM. Berechnen Sie den ursprünglichen Preis!

185. Der Jahresumsatz einer Firma ist um $12\frac{1}{2}$% auf 191 520 DM zurückgegangen. Wie groß war der Umsatz des Vorjahres?

186. Der Geschäftsumsatz betrug im Februar 14% weniger als im Januar, und zwar 14 534 DM. Wie hoch war der Umsatz im Januar?

8.1.2.2. Die Berechnung des Prozentsatzes

Gegeben sind der **Grundwert** und der **Prozentwert**;
gesucht wird der **Prozentsatz.**

Aufgabe: Der **Grundwert** ist 360 DM, der **Prozentwert** 18 DM.
Berechnen Sie den **Prozentsatz!**

Ausrechnung:

An 360 DM gewinnt man **18 DM** — **auf** den Bruchstrich = $\dfrac{18\ \text{DM}}{\quad}$

An 1 DM gewinnt man **den 360. Teil** — **unter** den Bruchstrich = $\dfrac{\quad}{360}$

An 100 DM gewinnt man **100** × **soviel** — **auf** den Bruchstrich = $\dfrac{\cdot 100}{\quad}$

Bruchstrich: $\dfrac{18\ \text{DM} \cdot 100}{360}$ gekürzt = 5 DM

Also beträgt der **Prozentsatz 5%**

Bei der **Berechnung des Prozentsatzes** stellen wir fest:

Auf dem Bruchstrich steht immer: **Prozentwert · 100,**

unter dem Bruchstrich steht immer der **Grundwert.**

Regel: $\text{Prozentsatz} = \dfrac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Grundwert}}$

Formel: $p = \dfrac{z \cdot 100}{k}$

Angewandte Aufgaben

187. Ein Beamter verdient brutto 1 280 DM und muß 121,60 DM Lohnsteuer zahlen. Wieviel % beträgt der Steuersatz?

188. Die Wohnungsmiete wird von 222 DM auf 248,64 DM erhöht. Wieviel % beträgt die Mieterhöhung?

189. Die Einwohnerzahl einer Stadt stieg von 254 817 auf 273 436. Wieviel % betrug die Zunahme?

190. Ein Haus hat einen Kaufwert von 85 000 DM. Die Jahresmiete beträgt 8 600 DM, die Unkosten und Abgaben belaufen sich auf jährlich 3 500 DM. Zu wieviel % verzinst sich das Haus?

191. In einem Fernmeldeamt befinden sich 3 600 Anrufeinheiten. Davon sind 54 mit Dienstanschlüssen belegt. Wie hoch ist der Prozentsatz?

192. Im Bundesgebiet wurden folgende Ortsgespräche geführt:
im Jahre 1938 332,200 Millionen Gespräche,
im Jahre 1950 423,555 Millionen Gespräche.
Wieviel % beträgt die Zunahme?

8.1.2.3. Die Berechnung des Grundwertes

Gegeben sind der **Prozentwert** und der **Prozentsatz;**
gesucht wird der **Grundwert.**

Aufgabe: Der **Prozentwert** ist 18 DM, der **Prozentsatz** 5%.
Berechnen Sie den **Grundwert!**

Ausrechnung:

5% des Grundwertes sind **18 DM** — **auf** den Bruchstrich $= \dfrac{18\text{ DM}}{}$

1% ist **der 5. Teil** davon — **unter** den Bruchstrich $= \dfrac{}{5}$

100% sind **100** × **soviel** — **auf** den Bruchstrich $= \dfrac{\cdot\, 100}{}$

Bruchstrich: $\dfrac{18\text{ DM} \cdot 100}{5}$ gekürzt = 360 DM

Also beträgt der **Grundwert 360 DM**

Bei der **Berechnung des Grundwertes** stellen wir fest:

Auf dem Bruchstrich steht immer: **Prozentwert · 100,**
unter dem Bruchstrich steht immer der **Prozentsatz.**

Regel: $\text{Grundwert} = \dfrac{\text{Prozentwert} \cdot 100}{\text{Prozentsatz}}$

Formel: $k = \dfrac{z \cdot 100}{p}$

Angewandte Aufgaben

193. Für ein Wohnhaus zahlt ein Mieter $7\frac{1}{2}$% des Kaufwertes als Jahresmiete, das sind 10 200 DM. Wie hoch war der Kaufwert des Hauses?

194. Ein Betrieb zahlt monatlich 11% Mehrwertsteuer, und zwar 2 123 DM. Wieviel beträgt der Monatsumsatz?

195. Eine Aktiengesellschaft verteilt 12% Dividende, und zwar 55 896 DM. Wieviel beträgt das Grundkapital?

196. Bei einem Konkursverfahren erhielt ein Gläubiger 45% seiner Forderung aus der Konkursmasse, und zwar 3 809,25 DM. Wie hoch war seine Forderung?

197. A bezieht eine monatliche Rente von 252 DM. Welches Kapital bringt bei einem Zinsfuß von $3\frac{1}{2}$% die gleichen Zinsen?

198. Im Jahre 1940 hatte die Stadt E. 38 200 Fernsprechteilnehmer. 1945 waren es 32% weniger, während am 1. Januar 1948 gegenüber 1945 die Zahl wieder um 25% angestiegen war. Wieviel Anschlüsse bestanden am 1. Januar 1948?

Zusammenstellung der Formeln der Prozentrechnung

Berechnung des Prozentwertes $z = \dfrac{k \cdot p}{100}$

Berechnung des Prozentsatzes $p = \dfrac{z \cdot 100}{k}$

Berechnung des Grundwertes $k = \dfrac{z \cdot 100}{p}$

Wir stellen fest:

1. Bei den **Formeln der Prozentrechnung** steht
links vom Gleichheitszeichen: der gesuchte Formelbuchstabe,
rechts vom Gleichheitszeichen: die zwei anderen Formelbuchstaben.

2. Die **Grundformel:** $z = \dfrac{k \cdot p}{100}$ prägen wir uns fest ein!

3. **Bei den zwei anderen Formeln** steht
links vom Gleichheitszeichen: der gesuchte Formelbuchstabe,
rechts vom Gleichheitszeichen:
auf dem Bruchstrich immer **z · 100,**
unter dem Bruchstrich der noch fehlende Buchstabe.

8.2. Die Promillerechnung

Die Promillerechnung ist eine Dreisatzrechnung mit der feststehenden Zahl 1 000 ohne Berücksichtigung der Zeit.

Promille (lat.: pro mille) bedeutet **für** oder **vom Tausend.**

Das **Zeichen für Promille** ist $^0/_{00}$.

Die Promillerechnung wird vor allem im **Versicherungswesen** (bei Lebens-, Feuerversicherungen usw.) angewandt.

Den Versicherungsschein nennt man **Police,** die Versicherungsbeiträge **Prämien.**

Auch bei der Promillerechnung erscheinen **drei Werte:**

Grundwert, Promillewert und **Promillesatz.**

Die **Versicherungssumme** ist der **Grundwert,**
die **Prämie** ist der **Promillewert,**
der **Prämiensatz** ist der **Promillesatz.**

Der Grundwert ist immer das Ganze oder 1 000 $^0/_{00}$.

8.2.1. Die Berechnung des Promillewertes

Die Regeln und Formeln der Promillerechnung entsprechen den Regeln und Formeln der Prozentrechnung; statt % wird $^0/_{00}$ eingesetzt.

Die **feststehende Zahl** heißt hier **1 000.**

Regel: $$\text{Promillewert} = \frac{\text{Grundwert} \cdot \text{Promillesatz}}{1\,000}$$

Formel: $$z = \frac{k \cdot p}{1\,000}$$

Angewandte Aufgaben

199. A hat seinen Hausrat mit 35 000 DM gegen Feuer versichert. Die Jahresprämie beträgt $1\frac{1}{4}\,^0/_{00}$. Wieviel muß er jährlich zahlen?

200. Ein massives Wohnhaus im Werte von 108 000 DM ist mit $1\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ gegen Feuer versichert. Wie hoch ist die Jahresprämie, wenn 15% des Versicherungsbeitrages als Steuer abgeführt werden müssen?

201. Ein Geschäftsmann versichert seine vier Schaufensterscheiben mit je 1 200 DM. Wieviel muß er halbjährlich zahlen, wenn die Prämie $2\frac{1}{2}\,^0/_{00}$ und die Steuer $12\frac{1}{2}\%$ des Versicherungsbeitrages ausmachen?

8.2.2. Die Berechnung des Promillesatzes

Regel: $$\text{Promillesatz} = \frac{\text{Promillewert} \cdot 1\,000}{\text{Grundwert}}$$

Formel: $$p = \frac{z \cdot 1\,000}{k}$$

Angewandte Aufgaben

202. Ein Haus mit einem Wert von 109 200 DM ist versichert. Die jährliche Prämie beträgt 136,50 DM. Wieviel $^0/_{00}$ sind das?

203. Die Postgebühren für Einzahlungen im Inland betragen:

bei Postanweisungen		bei Zahlkarten	
bis 10 DM	60 Pfg	bis 10 DM	30 Pfg
bis 50 DM	80 Pfg	bis 50 DM	40 Pfg
bis 100 DM	100 Pfg	bis 100 DM	50 Pfg
bis 500 DM	140 Pfg	über 100 DM	50 Pfg

Wieviel $^0/_{00}$ betragen die einzelnen Gebührensätze?

204. Ein Landwirt hat sein Getreide mit 16 800 DM gegen Hagel versichert. Er zahlt einschließlich 3,00 DM Versicherungssteuer 32,40 DM Jahresprämie. Wieviel $^0/_{00}$ nimmt die Versicherung?

8.2.3. Die Berechnung des Grundwertes

Regel: $\text{Grundwert} = \dfrac{\text{Promillewert} \cdot 1\,000}{\text{Promillesatz}}$

Formel: $k = \dfrac{z \cdot 1\,000}{p}$

Angewandte Aufgaben

205. A versichert sich gegen Einbruchdiebstahl. Er zahlt $1\frac{3}{4}$‰, das sind vierteljährlich 14,00 DM. Wie hoch ist die Versicherungssumme?

206. Ein Bauer versichert sein Getreide gegen Unwetterschaden. Die Prämie beträgt $1\frac{1}{2}$‰, der Versicherungsbeitrag einschließlich 10% Versicherungssteuer 39,60 DM. Wie groß ist die Versicherungssumme?

207. A zahlte bei einer Feuerversicherung $1\frac{3}{4}$‰ Prämie, und zwar halbjährlich 43,75 DM. a) Wie groß war die Versicherungssumme? b) Welche Entschädigung wurde gezahlt, wenn ein Brandschaden auf 40% geschätzt wurde?

8.3. Zusammenfassung und Wiederholung

208. Bei einer Ware im Werte von 2 458,00 DM wurde wegen einiger Mängel ein Preisnachlaß von 86,03 DM gewährt. Wieviel % betrug der Nachlaß?

209. Der monatliche Reinertrag eines Miethauses beträgt 1 250 DM. Wie groß ist bei einer Verzinsung von 7½% der Wert des Hauses?

210. Ein Haus war mit 90 000 DM gegen Brand versichert. Bei einem Brand zahlte die Versicherung 60% Entschädigung. Berechnen Sie den Unterschied zwischen der Entschädigung und der seit 8 Jahren gezahlten Versicherungsprämie in Höhe von 2,4‰!

211. Bei Zahlungsunfähigkeit eines Kaufmanns können die Forderungen der Gläubiger nur zu 70% befriedigt werden. Wieviel erhält A für 11 500 DM, B für 9 246 DM, C für 868 DM aus der Konkursmasse?

212. Für eine Hausratversicherung in Höhe von 30 000 DM werden $\frac{1}{2}$jährlich 22,50 DM Versicherungsprämie gezahlt. Wieviel ‰ sind das?

213. Ein PKW-Vorführwagen wird mit 15% Nachlaß für 5 134 DM verkauft. Berechnen Sie den Listenpreis des Wagens!

214. Vom 12. Januar bis zum 27. Dezember erbrachte ein zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehenes Kapital 258,75 DM Zinsen. Wie groß war das Kapital?

215. Kühe haben ein Schlachtgewicht von ungefähr 54%. Das Lebendgewicht einer Kuh beträgt 584 kg. Berechnen Sie das Schlachtgewicht!

216. Bausparverträge werden in ‰ je Monat gerechnet. Jemand zahlt $3\frac{1}{2}$‰ Bausparprämie, und zwar $\frac{1}{2}$jährlich 840 DM. Über welche Summe ist der Bausparvertrag abgeschlossen?

217. Die Bundesrepublik zählte 1952 48 593 000 Einwohner. Ende 1965 betrug die Einwohnerzahl 52 966 370 Einwohner. Berechnen Sie den Prozentsatz der Bevölkerungszunahme!

218. Die Vermittlungsgebühr für einen Versicherungsabschluß über 25 000 DM beträgt $3\frac{1}{2}$‰. Wieviel DM erhält der Versicherungsvertreter?

219. Angehörige einer Textilfabrik erhalten auf alle Erzeugnisse des Werkes einen Preisnachlaß von 12%. Jemand kauft einen Anzug für 231 DM. Wieviel beträgt der Preisnachlaß?

220. Der Monatsumsatz eines Geschäftes ist um 12% auf 37 632 DM gestiegen. Wie groß war der alte Monatsumsatz?

221. Bei einem Bausparvertrag über 25 000 DM beträgt die vierteljährliche Sparprämie 25 DM. Wie hoch ist der Promillesatz?

222. Ein PKW kostet nach einer Preiserhöhung von 5% 5 145 DM. Berechnen Sie den alten Kaufpreis!

223. Durch einen Verkehrsunfall ist der Wert eines Autos um $16\frac{2}{3}$% gemindert und beträgt nur noch 7 040 DM. Wieviel betrug der Neuwert des Autos?

9. Die Zins- und Diskontrechnung

9.1. Einführung in die Zins-, Zinseszins- und Diskontrechnung

9.1.1 Die Zinsrechnung

Die Zinsrechnung ist eine Prozentrechnung mit Berücksichtigung der Zeit.

Den drei Werten der **Prozentrechnung:**

Grundwert, Prozentwert und **Prozentsatz**

entsprechen bei der **Zinsrechnung** die Werte:

Kapital, Zinsen und **Zinsfuß;**

als 4. Wert erscheint bei der Zinsrechnung die **Zeit.**

Jede Geldsumme, die einen Ertrag abwirft, nennt man **Kapital.**

Den Ertrag, den ein Kapital abwirft, nennt man **Zinsen.**

Den Prozentsatz, der bei Zinszahlungen angegeben ist, nennt man **Zinsfuß.**

Die **Zeit:** Bei der Zinsrechnung gilt **1 Jahr** immer als **360 Tage,**
1 Monat immer als **30 Tage.**

Von den 4 Werten:

Kapital, Zinsen, Zinsfuß und **Zeit**

sind stets **3 Werte gegeben,** der **4. Wert** wird **gesucht.**

gegeben sind **Kapital, Zinsfuß** und **Zeit** — gesucht werden die **Zinsen**

gegeben sind **Kapital, Zinsen** und **Zeit** — gesucht wird der **Zinsfuß**

gegeben sind **Zinsfuß, Zinsen** und **Zeit** — gesucht wird das **Kapital**

gegeben sind **Kapital, Zinsfuß** und **Zinsen** — gesucht wird die **Zeit**

Die **Zinsen** berechnet man nach der Höhe des **Kapitals,** nach dem angegebenen **Zinsfuß** und nach der angegebenen **Zeit.**

Je größer das **Kapital,** je höher der **Zinsfuß** und je länger die **Zeit** ist, desto mehr **Zinsen** sind zu zahlen.

Bei der **einfachen Zinsrechnung** bleiben die **Zinseszinsen** (siehe S. 109) **unberücksichtigt.**

Ausgeliehenes Geld nennt man **Darlehen;** der Verleiher des Geldes ist der **Gläubiger,** der Empfänger ist der **Schuldner.**

Bei kleineren Darlehen erhält der Gläubiger vom Schuldner einen **Schuldschein**

Bei größeren Darlehen wird die Schuldsumme als **Hypothek** beim Amtsgericht auf dem Grundbuchamt (Katasteramt) in das **Grundbuch** eingetragen.

Der Gläubiger erhält für das Darlehen einen **Hypothekenbrief.**

Bei Rückgabe der Schuldsumme wird die im Grundbuch eingetragene **Hypothek gelöscht.**

9.1.2. Die Zinseszinsrechnung

Bei der **Zinsrechnung** werden nur die **einfachen Zinsen** berechnet.

Banken, Sparkassen und Versicherungsgesellschaften berechnen aber auch **Zinseszinsen.**

Die fälligen **Zinsen** werden **zum Kapital** geschlagen und mit dem Kapital weiterverzinst.

Da die Berechnung der Zinseszinsen sehr umständlich ist, benutzen die Kassen und Banken **Zinseszinstafeln;** diese geben an, zu welchem Betrag ein **Kapital von 1 DM** bei bestimmten Prozentsätzen im Laufe der Jahre anwächst.

Die in der Zinseszinstafel abgelesene **Zinseszinszahl** wird **mit dem** gegebenen **Kapital multipliziert.**

9.1.3. Auszug aus einer Zinseszinstafel

1 DM beträgt mit Zinseszinsen

nach Jahren	bei 3%	bei 3½%	bei 4%	bei 4½%	bei 5%
1	1,0300	1,0350	1,0400	1,0450	1,0500
2	1,0609	1,0712	1,0816	1,0920	1,1025
3	1,0927	1,1087	1,1249	1,1412	1,1576
4	1,1255	1,1475	1,1699	1,1925	1,2155
5	1,1593	1,1877	1,2167	1,2462	1,2763
usw.					

9.1.4. Die Diskontrechnung

Die Diskontrechnung ist eine Rabattrechnung mit Berücksichtigung der Zeit.

Der **Diskont** (auch Diskonto oder Skonto genannt) ist der **Zinsbetrag**, der bei Ankauf einer noch nicht fälligen Forderung **abgezogen** wird.

Der **Zinsfuß** heißt bei der Diskontrechnung **Diskontfuß.**

Der **Diskont** bezieht sich, wenn nicht anders bestimmt, **immer auf 1 Jahr (p. a. = pro anno** = aufs Jahr).

Wie bei der Zinsrechnung gilt auch bei der Diskontrechnung

1 Jahr immer als **360 Tage,** **1 Monat** immer als **30 Tage.**

Von den vier Werten:

Rechnungssumme, Diskont, Diskontfuß und **Zeit**

sind wie bei der Zinsrechnung stets **drei Werte gegeben, der 4. Wert wird gesucht.**

Merken Sie:

Rechnungssumme — Diskont = Barzahlung

9.2. Die Berechnung von Zinsen und Diskont

Gegeben sind das **Kapital,** der **Zinsfuß** und die **Zeit;**
gesucht werden die **Zinsen.**

Aufgabe:

Wieviel Zinsen bringen 468 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren?

Ansatz:

100 DM bringen in 1 Jahr $3\frac{1}{3}$ DM Zinsen

1 DM bringt in $2\frac{1}{2}$ Jahren ? DM Zinsen ?

Ausrechnung:

100 DM	bringen in	1 Jahr	$\frac{10}{3}$	DM Zinsen
1 DM	bringt in	1 Jahr	$\frac{10}{3 \cdot 100}$	DM Zinsen

468 DM	bringen in	1 Jahr	$\frac{10 \cdot 468}{3 \cdot 100}$	DM Zinsen
468 DM	bringen in	$\frac{1}{2}$ Jahr	$\frac{10 \cdot 468}{3 \cdot 100 \cdot 2}$	DM Zinsen
468 DM	bringen in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	$\frac{10 \cdot 468 \cdot 5}{3 \cdot 100 \cdot 2}$	DM Zinsen

Bruchstrich:

$$\text{Zinsen} = \frac{10 \cdot 468\ \text{DM} \cdot 5}{3 \cdot 100 \cdot 2}$$

Wir stellen die Faktoren um und setzen das **Kapital an den Anfang des Bruchstriches:**

$$\text{Zinsen} = \frac{468\ \text{DM} \cdot 10 \cdot 5}{100 \cdot 3 \cdot 2}\ \text{gekürzt} = 39\ \text{DM}$$

Also bringen 468 DM zu $3\frac{1}{3}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren **39 DM Zinsen.**

Wir stellen fest:

Bei der **Berechnung von Zinsen und Diskont** stehen **Kapital, Zinsfuß und Zeit auf dem Bruchstrich,**
die **Zahl 100** steht **unter dem Bruchstrich.**

Sind **Zinsfuß und Zeit gemischte Zahlen,** so verwandeln wir diese in **unechte Brüche** und setzen die **Zähler auf** und die **Nenner unter den Bruchstrich.**

Die vier Werte der **Zinsrechnung:**

Kapital, Zinsen, Zinsfuß und **Zeit** sowie

die vier Werte der **Diskontrechnung:**

Rechnungssumme, Diskont, Diskontfuß und **Zeit (Verfalltag)**

bezeichnen wir kurz mit den **Formelbuchstaben k, z, p und t,**
und zwar:

das **Kapital** und die **Rechnungssumme**	mit **k,**
die **Zinsen** und den **Diskont**	mit **z,**
den **Zinsfuß** und den **Diskontfuß**	mit **p,**
die **Zeit** und den **Verfalltag**	mit **t.**

Zinsformel:

$$\text{Zinsen} = \frac{\text{Kapital} \cdot \text{Zinsfuß} \cdot \text{Zeit}}{100} \qquad z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$$

$$\text{Diskont} = \frac{\text{Rechnungssumme} \cdot \text{Diskontfuß} \cdot \text{Zeit}}{100} \qquad z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$$

Übungsaufgabe 224

Berechnen Sie die Jahres-, Monats- und Tageszinsen!

a) 300 DM zu 4 % in 3 Jahren
b) 800 DM zu $3\frac{1}{2}$% in 5 Jahren
c) 2 560 DM zu 3 % in $3\frac{3}{4}$ Jahren
d) 6 450 DM zu $6\frac{2}{3}$% in $3\frac{1}{2}$ Jahren
e) 240 DM zu 5 % in 9 Monaten
f) 380 DM zu $3\frac{2}{3}$% in $5\frac{1}{2}$ Monaten
g) 3 240 DM zu $4\frac{1}{2}$% in $\frac{2}{3}$ Monaten
h) 7 450 DM zu $3\frac{3}{4}$% in $5\frac{2}{3}$ Monaten
i) 400 DM zu 5 % in 21 Tagen
k) 800 DM zu 8 % in 33 Tagen
l) 750 DM zu $4\frac{1}{2}$% in 25 Tagen
m) 650 DM zu $3\frac{1}{4}$% in 56 Tagen

Merksatz:

Die Zeit (t) erscheint am Bruchstrich immer als Jahr:

3 Mon. $= \frac{1}{4}$ Jahr	4 Mon. $= \frac{1}{3}$ Jahr	6 Mon. $= \frac{1}{2}$ Jahr
1 Mon. $= \frac{1}{12}$ Jahr	5 Mon. $= \frac{5}{12}$ Jahr	7 Mon. $= \frac{7}{12}$ Jahr
$\frac{1}{2}$ Mon. $= \frac{1}{24}$ Jahr	$\frac{1}{3}$ Mon. $= \frac{1}{36}$ Jahr	$\frac{1}{4}$ Mon. $= \frac{1}{48}$ Jahr
1 Tag $= \frac{1}{360}$ Jahr	27 Tage $= \frac{27}{360}$ Jahr	153 Tage $= \frac{153}{360}$ Jahr

Den **Zähler** des Bruches setzen wir **auf den Bruchstrich**, den **Nenner** setzen wir **unter den Bruchstrich.**

9.2.1. Die Berechnung der Zinstage

In vielen Zinsrechenaufgaben sind die **Zinstage,** d. i. die **Anzahl der Tage, für die Zinsen gezahlt werden soll,** nicht angegeben; die Zinstage müssen also berechnet werden.

Bei der Berechnung der Zinstage dürfen keine Fehler gemacht werden; denn wenn die **Zinstage falsch** berechnet sind, müssen auch die berechneten **Zinsen falsch** sein.

Um bei der **Berechnung der Zinstage** jeden Fehler auszuschalten, wenden wir folgende Methode an.

Beispiel a)

Wir berechnen die Zinstage vom 14. März bis 26. Juli:

$$\frac{26 - 14}{\text{VII} - \text{III}} = \frac{12}{\text{IV}} = 4 \text{ Monate } 12 \text{ Tage } (4 \cdot 30 + 12) = \underline{\underline{132 \text{ Tage}}}$$

Erklärung:

Die **Tage** setzen wir **mit arabischen Ziffern auf den Bruchstrich,** die **Monate** kommen **mit römischen Ziffern unter den Bruchstrich.** Das spätere **Datum** steht **vorne,** das **frühere** steht **hinten.**

Also: $\frac{26 - 14}{\text{VII} - \text{III}}$

Nun **subtrahieren** wir die **Tage:** 26 — 14 = 12 Tage
dann **subtrahieren** wir die **Monate:** VII — III = IV Monate

Ergebnis: IV Monate und 12 Tage $(4 \cdot 30 + 12) = \underline{\underline{132 \text{ Tage}}}$

Beispiel b)

Wir berechnen die Zinstage vom 18. Februar bis 12. August:

$$\frac{12 - 18}{\text{VIII} - \text{II}} = \frac{42 - 18}{\text{VII} - \text{II}} = \frac{24}{\text{V}} = 5 \text{ Monate } 24 \text{ Tage } (5 \cdot 30 + 24) = \underline{\underline{174 \text{ Tage}}}$$

Erklärung:

Wir schreiben zunächst wie in Beispiel a) die **Tage** und **Monate an den Bruchstrich:**

Also: $\frac{12 - 18}{\text{VIII} - \text{II}}$

Die Tage (12—18) kann man nicht subtrahieren.

Wir leihen deshalb bei den VIII Monaten 1 Monat = 30 Tage.

Wir addieren die 30 Tage zu den 12 Tagen und rechnen:

$$\frac{(30 + 12) = 42}{(\text{VIII}-\text{I}) = \text{VII}} \qquad \frac{42 - 18}{\text{VII} - \text{II}} = \frac{24 \text{ Tage}}{\text{V Monate}}$$

Ergebnis: V Monate und 24 Tage $(5 \cdot 30 + 24) = \underline{\underline{174 \text{ Tage}}}$

Beispiel c)

Wir berechnen die Zinstage vom 21. November bis zum 8. Februar des nächsten Jahres:

$$\frac{8 - 21}{XIV - XI} = \frac{38 - 21}{XIII - XI} = \frac{17}{II} = 2\text{ Monate }17\text{ Tage }(2 \cdot 30 + 17) = \underline{\underline{\textbf{77 Tage}}}$$

Erklärung:

Die Monate des nächsten Jahres erhalten folgende römische Ziffern:

Januar = XIII Februar = XIV März = XV usw.

Wir schreiben die Tage und Monate an den Bruchstrich,

entleihen 1 Monat = 30 Tage und rechnen:

$$\frac{38 - 21}{XIII - XI} = \frac{17\text{ Tage}}{II\text{ Monate}}$$

Ergebnis: II Monate und 17 Tage $(2 \cdot 30 + 17) = \underline{\underline{\textbf{77 Tage}}}$

Angewandte Aufgaben

225. A leiht zwei Kapitalien aus: 8 460 DM zu 5% und 10 350 DM zu $3\frac{1}{2}$%. Wieviel betragen die Jahreszinsen?

226. B hat drei Geldsummen ausgeliehen: 2 400 zu $3\frac{2}{3}$ %, 1 560 DM zu $3\frac{1}{2}$% und 1 680 DM zu $4\frac{1}{4}$ %. Wieviel betragen die gesamten monatlichen Zinsen?

227. C hat am 8. Mai 1 275 DM geliehen. Er muß $6\frac{2}{3}$% Zinsen zahlen. Wieviel muß er am 23. Juli an Kapital und Zinsen zurückzahlen?

228. Eine Hypothek von 24 000 DM wurde bisher mit $6\frac{1}{2}$% verzinst. Wieviel Zinsen sind nun monatlich mehr zu zahlen, wenn der Zinsfuß auf $7\frac{1}{4}$% erhöht wird?

229. M nimmt auf sein Haus, das eine Jahresmiete von 8 400 DM einbringt, eine Hypothek von 30 000 DM zu $7\frac{1}{2}$% auf. Wieviel bleibt ihm nach Zahlung der Hypothekenzinsen monatlich von der Miete noch übrig?

230. Ein Haus im Werte von 128 000 DM wird verkauft. Die Anzahlung beträgt 36 000 DM, der Rest wird als 1. Hypothek zu $6\frac{1}{2}$% eingetragen. Berechnen Sie die halbjährlichen Hypothekenzinsen!

231. Auf ein Haus, das 96 000 DM wert ist, sind 3 Hypotheken eingetragen: eine 1. Hypothek von 24 000 DM zu $5\frac{1}{2}$%, eine 2. Hypothek von 15 000 DM zu $6\frac{2}{3}$% und eine 3. Hypothek von 6 500 DM zu $8\frac{1}{4}$%. Wieviel betragen die vierteljährlichen Hypothekenzinsen?

232. Ein Sparer zahlt bei einer Sparkasse ein: am 15. Januar 675 DM, am 12. März 325 DM, am 18. April 835 DM. Die Sparkasse zahlt $4\frac{1}{2}$% Zinsen. Wieviel betragen die Zinsen am Schlusse des Jahres? (Bei der Berechnung der Zinstage hat jeder Monat 30 Tage.)

233. Eine am 1. April ausgeliehene Schuldsumme von 2 500 DM sollte am 1. Oktober mit $6\frac{1}{2}$% Zinsen zurückgezahlt werden, wurde aber erst am 1. Januar gezahlt. Wieviel betrug dann die Rückzahlung, wenn für Verzugszinsen $8\frac{1}{2}$% berechnet wurden?

234. An einem Unternehmen ist A mit 165 450 DM, B mit 124 500 DM und C mit 96 800 DM beteiligt. Am Ende des Geschäftsjahres wird ein Reingewinn von 58 012,51 DM errechnet. Für sein angelegtes Kapital erhält jeder Teilhaber vorerst $6\frac{1}{2}$% Zinsen. Der Rest des Gewinnes wird zu gleichen Teilen aufgeteilt. Wieviel DM erhält jeder?

235. A muß nach 3 Monaten 270 DM bezahlen. Der Diskontfuß beträgt $3\frac{1}{3}$%. Er zahlt 24 Tage vor dem Fälligkeitstage. Wieviel beträgt die Barzahlung?

236. B hat nach 3 Monaten 720 DM zu zahlen. Er zahlt schon nach 48 Tagen. Der Diskontfuß beträgt $\frac{1}{2}$% je Monat. Wieviel muß er bezahlen?

237. Eine Schuldsumme von 1 200 DM wurde 54 Tage vor dem Verfalltag mit $3\frac{1}{2}$% Diskont zurückgezahlt. Wieviel betrug die Rückzahlung?

238. Eine Sendung Kaffee wog brutto 150 kg. Die Tara betrug 2%, der Nettopreis für 1 kg Kaffee 16,80 DM, das Ziel 3 Monate. Die Ware wird 2 Monate nach Empfang bezahlt, der Diskontfuß betrug $4\frac{1}{2}$%. Wie hoch war der Barzahlungsbetrag?

9.3. Die Berechnung von Zins- und Diskontfuß

Gegeben sind **Kapital, Zinsen** und **Zeit**;
gesucht wird der **Zinsfuß.**

Aufgabe:

468 DM bringen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen. Wie hoch ist der Zinsfuß?

Ansatz:

468 DM bringen in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen
100 DM bringen in 1 Jahr ? DM Zinsen?

Ausrechnung:

468 DM	bringen in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	39	DM Zinsen
1 DM	bringt in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	$\frac{39}{468}$	DM Zinsen
100 DM	bringen in	$2\frac{1}{2}$ Jahren	$\frac{39 \cdot 100}{468}$	DM Zinsen
100 DM	bringen in	$\frac{1}{2}$ Jahr	$\frac{39 \cdot 100}{468 \cdot 5}$	DM Zinsen
100 DM	bringen in	1 Jahr	$\frac{39 \cdot 100 \cdot 2}{468 \cdot 5}$	DM Zinsen

Bruchstrich:

$$\text{Zinsfuß} = \frac{39\ \text{DM} \cdot 100 \cdot 2}{468 \cdot 5} \quad \text{gekürzt} = 3\tfrac{1}{3}\ \text{DM}$$

Also beträgt der **Zinsfuß** $3\frac{1}{3}$ %

Formel:

$$\text{Zinsfuß} = \frac{\text{Zinsen} \cdot 100}{\text{Kapital} \cdot \text{Zeit}} \qquad p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot t}$$

$$\text{Diskontfuß} = \frac{\text{Diskont} \cdot 100}{\text{Rechnungssumme} \cdot \text{Zeit}} \qquad p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot t}$$

Übungsaufgabe 239

Berechnen Sie den Zinsfuß!

	Kapital	Zeit	Zinsen		Kapital	Zeit	Zinsen
a)	240 DM	$2\frac{1}{2}$ Jahre	20,00 DM	b)	172 DM	$3\frac{3}{4}$ Jahre	43,00 DM
c)	640 DM	4 Monate	9,60 DM	d)	525 DM	9 Monate	15,75 DM
e)	840 DM	72 Tage	5,88 DM	f)	450 DM	168 Tage	11,55 DM

Angewandte Aufgaben

240. Ein Beamter zahlt von seinem Monatsgehalt, das 1 496 DM beträgt, 164,56 DM Lohnsteuer. Wieviel % beträgt die Lohnsteuer?

241. a) 560 DM sind nach $2\frac{1}{4}$ Jahren auf 607,25 DM,
b) 2 560 DM sind nach $7\frac{1}{2}$ Monaten auf 2 632,00 DM,
c) 2 430 DM sind nach 108 Tagen auf 2 481,03 DM angewachsen.
Berechnen Sie den Zinsfuß!

242. Vom 1. Juli 1970 bis 1. Oktober 1971 stiegen 3 600 DM durch die Zinsen auf 3 780 DM an. Wieviel % betrug der Zinsfuß?

243. 9 525 DM bringen in 1 Jahr ebensoviel Zinsen wie 6 350 DM zu 6% in 2 Jahren. Berechnen Sie den Zinsfuß des ersten Kapitals!

244. Ein Schuldner zahlt eine Summe von 1 280 DM nach 5 Monaten einschließlich der Zinsen mit 1 304 DM zurück. Wieviel % betrug der Zinsfuß?

245. Ein Kaufmann leiht für ein kurzfristiges Geschäft 5 000 DM und zahlt nach 3 Monaten 5 150 DM zurück. Berechnen Sie den Zinsfuß!

246. Eine am 13. Mai fällige Rechnungssumme von 624 DM wird nach erfolgloser Mahnung am 25. September durch Postprotestauftrag in Höhe von 641,16 DM eingezogen. Wieviel % Verzugszinsen wurden berechnet?

247. Ein am 1. Januar bei einer Bank angelegtes Sparkonto über 720 DM wurde 4 Monate später wieder aufgelöst. 728,40 DM wurden ausgezahlt. Wieviel % Zinsen zahlte die Bank?

248. Ein Haus hat einen Wert von 120 000 DM. Es bringt monatlich 1 350 DM Miete ein. Für Unkosten und Steuern müssen vierteljährlich 450 DM abgerechnet werden. Wie hoch verzinst sich das Haus?

249. Ein Rechnungsbetrag von 450 DM, fällig am 11. Mai, wird am 23. Oktober durch Postprotestauftrag über 474,30 DM eingezogen. Wieviel % Verzugszinsen sind berechnet?

250. A bezahlt eine Rechnung, die 3 Monate Ziel hatte, 50 Tage vor dem Fälligkeitstage mit 573,60 DM. Der Diskont betrug 2,40 DM. Wie hoch war der Diskontfuß?

251. B bezahlt eine am 12. April fällige Rechnung von 270 DM am 2. März mit 269,25 DM. Berechnen Sie den Diskontfuß!

252. Eine Rechnung von 840 DM war am 11. Mai fällig; am 23. März bereits wurden 836,64 DM durch Postscheck überwiesen. Berechnen Sie den Diskontfuß!

253. Jemand erhält eine Kiste Wein: 30 Flaschen Rheinwein zu 3,60 DM, 20 Flaschen Moselwein zu 4,80 DM und 10 Flaschen Rotwein zu 5,40 DM. Er bezahlt die Rechnung, die 3 Monate Ziel hat, sofort mit 256,71 DM. Wieviel % beträgt der Diskont?

9.4. Die Berechnung des Kapitals und der Rechnungssumme

Gegeben sind **Zinsfuß, Zinsen** und **Zeit;**
gesucht wird das **Kapital.**

Aufgabe:

Welches Kapital bringt zu $3\frac{1}{3}\%$ in $2\frac{1}{2}$ Jahren 39 DM Zinsen?

Ansatz:

$3\frac{1}{3}$ DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von 100 DM
39 DM Zinsen erbringt in $2\frac{1}{2}$ Jahren ein Kapital von ? DM

Ausrechnung:

$\frac{10}{3}$ DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von 100 DM

$\frac{1}{3}$ DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von $\frac{100}{10}$ DM

1 DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3}{10}$ DM

39 DM Zinsen erbringt in 1 Jahr ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3 \cdot 39}{10}$ DM

39 DM Zinsen erbringt in $\frac{1}{2}$ Jahr ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3 \cdot 39 \cdot 2}{10}$ DM

39 DM Zinsen erbringt in $2\frac{1}{2}$ Jahren ein Kapital von $\frac{100 \cdot 3 \cdot 39 \cdot 2}{10 \cdot 5}$ DM

Bruchstrich:

Kapital $= \frac{100 \cdot 3 \cdot 39 \text{ DM} \cdot 2}{10 \cdot 5}$ oder $\frac{39 \text{ DM} \cdot 100 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 5}$ gekürzt = 468 DM

Also beträgt das **Kapital 468 DM**

Formel:

$$\text{Kapital} = \frac{\text{Zinsen} \cdot 100}{\text{Zinsfuß} \cdot \text{Zeit}} \qquad k = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$$

$$\text{Rechnungssumme} = \frac{\text{Diskont} \cdot 100}{\text{Diskontfuß} \cdot \text{Zeit}} \qquad k = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$$

Übungsaufgabe 254

Berechnen Sie das Kapital!

	Zinsfuß	Zeit	Zinsen		Zinsfuß	Zeit	Zinsen
a)	$4\frac{1}{2}\%$	$2\frac{1}{4}$ Jahre	729,00 DM	**b)**	$3\frac{1}{2}\%$	$1\frac{1}{4}$ Jahre	17,50 DM
c)	$1\frac{3}{4}\%$	$5\frac{1}{3}$ Monate	0,56 DM	**d)**	$4\frac{1}{2}\%$	$2\frac{1}{2}$ Monate	6,75 DM
e)	$6\frac{2}{3}\%$	72 Tage	10,60 DM	**f)**	5 %	80 Tage	10,20 DM

Angewandte Aufgaben

255. A erhielt vierteljährlich 262,50 DM Zinsen von einem Kapital, das mit $7\frac{1}{2}$% verliehen war. Berechnen Sie das Kapital!

256. Für eine Hypothek, die mit $7\frac{1}{2}$% verzinst wird, müssen halbjährlich 270 DM Zinsen gezahlt werden. Wie groß ist die Hypothek?

257. Z trinkt täglich 1 Doppelkorn zu 50 Pf, 2 Glas Bier zu je 60 Pf und raucht 10 Zigaretten zu je 10 Pf. Von welchem Kapital wären das bei $4\frac{1}{2}$% die Zinsen?

258. Ein Arbeiter bezieht monatlich 280 DM Rente. Wieviel Kapital müßte er erspart haben, wenn er bei einem Zinsfuß von 4% ebensoviel Zinsen hätte haben wollen? (Zinseszinsen bleiben unberücksichtigt.)

259. Eine am 15. November fällige Rechnung mit einem Diskontfuß von $2\frac{1}{2}$% wurde am 5. Oktober bezahlt. Der Diskont betrug 1,20 DM. Berechnen Sie die Rechnungssumme!

260. Ein Kaufmann bezahlte eine Rechnung 45 Tage vor dem Fälligkeitstage und zog 3,60 DM als Diskont ab. Der Diskontfuß betrug $\frac{3}{4}$% je Monat. Wieviel betrug die Rechnungssumme?

9.5. Die Berechnung der Zeit und des Verfalltages

Gegeben sind **Kapital, Zinsfuß** und **Zinsen;**
gesucht wird die **Zeit.**

Aufgabe:

In welcher Zeit bringen 468 DM zu $3\frac{1}{3}$% 39 DM Zinsen?

Ansatz:

100 DM Kapital bringen $3\frac{1}{3}$ DM Zinsen in 1 Jahr.

468 DM Kapital bringen 39 DM Zinsen in ? Jahren?

Ausrechnung:

100 DM Kapital	bringen $\frac{10}{3}$ DM Zinsen in	1	Jahr
1 DM Kapital	bringt $\frac{10}{3}$ DM Zinsen in	$1 \cdot 100$	Jahren
468 DM Kapital	bringen $\frac{10}{3}$ DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100}{468}$	Jahren
468 DM Kapital	bringen $\frac{1}{3}$ DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100}{468 \cdot 10}$	Jahren
468 DM Kapital	bringen 1 DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100 \cdot 3}{468 \cdot 10}$	Jahren
468 DM Kapital	bringen 39 DM Zinsen in	$\frac{1 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 39}{468 \cdot 10}$	Jahren

Bruchstrich:

$$\text{Zeit} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 3 \cdot 39}{468 \cdot 10} \quad \text{oder} \quad \frac{39 \cdot 100 \cdot 3}{468 \cdot 10} \quad \text{gekürzt} = 2\frac{1}{2}$$

Also beträgt die **Zeit** $2\frac{1}{2}$ **Jahre**

Formel:

$$\textbf{Zeit} = \frac{\textbf{Zinsen} \cdot \textbf{100}}{\textbf{Kapital} \cdot \textbf{Zinsfuß}} \qquad t = \frac{z \cdot 100}{k \cdot p}$$

$$\textbf{Verfalltag} = \frac{\textbf{Diskont} \cdot \textbf{100}}{\textbf{Rechnungssumme} \cdot \textbf{Diskontfuß}} \qquad t = \frac{z \cdot 100}{k \cdot p}$$

Übungsaufgabe 261

Berechnen Sie die Zeit!

	Kapital	Zinsfuß	Zinsen		Kapital	Zinsfuß	Zinsen
a)	600 DM	5 %	60,00 DM	**b)**	630 DM	4 %	18,90 DM
c)	720 DM	$4\frac{1}{2}$%	81,00 DM	**d)**	240 DM	$3\frac{3}{4}$%	27,00 DM
e)	2 496 DM	$4\frac{1}{4}$%	70,72 DM	**f)**	1 200 DM	6 %	54,00 DM
g)	2 400 DM	$4\frac{1}{2}$%	21,60 DM	**h)**	2 880 DM	$6\frac{2}{3}$%	24,00 DM

Übungsaufgabe 262

Berechnen Sie den Verfalltag!

	Zahltag	Rechnungssumme	Diskont	Diskontfuß
a)	15. Oktober	1 500 DM	4,50 DM	2 %
b)	7. Juni	750 DM	6,00 DM	4 %
c)	23. März	1 785 DM	7,14 DM	$2\frac{1}{4}$%
d)	12. April	2 430 DM	6,75 DM	$2\frac{1}{2}$%
e)	18. Mai	1 080 DM	7,00 DM	$3\frac{1}{3}$%

Angewandte Aufgaben

263. In wieviel Tagen bringen 6 400 DM zu 3% 25,60 DM Zinsen?

264. In welcher Zeit wachsen 3 600 DM zu 6% auf 5 400 DM an?

265. Für 2 500 DM, die zu $4\frac{1}{2}$% ausgeliehen waren, erhielt man 281,25 DM Zinsen. Wie lange waren sie ausgeliehen?

266. Wie lange wird ein Kapitel von 6 600 DM zu 4% ausgeliehen, wenn die Rückzahlung einschließlich Zinsen 7 260 DM beträgt?

267. Bei einer Rechnungssumme von 480 DM wird jemand mit $7\frac{1}{2}$% Verzugszinsen, das sind 12,40 DM, belastet. Für wieviel Tage wurden Verzugszinsen berechnet?

268. A lieh am 1. Januar 1 200 DM zu 4% aus. An Kapital und Zinsen erhielt er 1 209,60 DM zurück. Wann erhielt er das Geld zurück?

269. B bezahlt eine Rechnung von 2 430 DM nach Abzug von 6,75 DM Diskont am 12. April. Der Diskontfuß beträgt $2\frac{1}{2}$%. Berechnen Sie den Fälligkeitstag!

270. C bezahlt am 12. Oktober eine Rechnung von 1 125 DM und zieht 15 DM Diskont ab. Der Diskontfuß beträgt $\frac{1}{2}$% je Monat. Wann war der Fälligkeitstag?

Zusammenstellung der Zinsformeln

Berechnung der Zinsen	**Formel I:** **(Zinsformel)**	$z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$
Berechnung des Zinsfußes	**Formel II**	$p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot t}$
Berechnung des Kapitals	**Formel III**	$k = \frac{z \cdot 100}{p \cdot t}$
Berechnung der Zeit	**Formel IV**	$t = \frac{z \cdot 100}{k \cdot p}$

Wir stellen fest:

1. Bei den **Formeln der Zinsrechnung** steht
   links vom Gleichheitszeichen: der gesuchte Formelbuchstabe,
   rechts vom Gleichheitszeichen: die drei anderen Formelbuchstaben.

2. Die **Zinsformel:** $z = \frac{k \cdot p \cdot t}{100}$ prägen wir uns fest ein!

3. Bei den **Formeln II, III und IV** steht
   links vom Gleichheitszeichen: der gesuchte Formelbuchstabe;
   rechts vom Gleichheitszeichen stehen
   auf dem Bruchstrich immer **z · 100,**
   unter dem Bruchstrich die zwei noch fehlenden Formelbuchstaben.

4. Soll **durch einen Bruch dividiert** werden, so wird **mit dem umgekehrten Bruch multipliziert.**

5. **Die Zeit erscheint am Bruchstrich immer als Jahr.**

9.6. Zusammenfassung und Wiederholung

271. Jemand kauft ein Ackerstück für 9 600 DM und erhält dafür 672 DM Jahrespacht. Wie hoch verzinst sich das Kapital?

272. A sparte 7 500 DM. Nach wieviel Jahren werden die einfachen Zinsen die Höhe des Kapitals erreicht haben, wenn die Sparkasse die Einlagen mit 4% verzinst?

273. Eine Schuldsumme von 18 150 DM wurde bereits am 1. Juni nach Abzug von 60,50 DM Diskont zurückgezahlt. Der Diskontfuß betrug $3\frac{1}{3}\%$. Wann war der Verfalltag?

274. Ein Haus war 5 Jahre lang mit einer Hypothek von 15 400 DM belastet. Der Zinsfuß betrug 8%. Berechnen Sie die Zinseinnahmen!

275. Nach Abzug von 12,36 DM Diskont auf die Zeit vom 5. April bis zum 5. Juni zahlte man 1 841,64 DM bar. Wie hoch war der Diskontfuß?

276. Der monatliche Reinertrag eines Hauses beträgt 840 DM. Welchen Wert hat das Haus, wenn man mit einer Verzinsung von $6\frac{1}{4}\%$ rechnet?

277. Jemand hat 2 430 DM zu 6% verliehen. Bei der Rückzahlung erhielt er 60,75 DM Zinsen. Wie lange war das Geld verliehen?

278. Berechnen Sie die vierteljährlichen Zinsen von 9 000 DM, wenn der Zinsfuß 8% beträgt!

279. Ein Wechsel über 2 450 DM ist am 1. Juli fällig. Er wird bereits am 1. Mai mit 6% Diskont p.a. eingelöst. Wieviel ist zu zahlen?

280. Jemand hat soviel gespart, daß er im Alter monatlich 620 DM Zinsen verbrauchen kann. Berechnen Sie mit einem Zinsfuß von $4\frac{1}{2}\%$ das Kapital!

281. Ein Haus im Werte von 148 000 DM bringt einen Reinertrag von 13 320 DM im Jahr. Wie hoch verzinst sich das Haus?

282. Jemand zahlt am 17. November 4 500 DM auf der Sparkasse ein. Wieviel Zinsen werden am Jahresende gutgeschrieben, wenn die Einlagen mit 6% verzinst werden?

283. Ein am 1. Juni fälliger Wechsel wird am 16. April gekauft. Bei einem Diskontfuß von 4% wurden 3,52 DM als Diskont abgezogen. Auf welche Summe war der Wechsel ausgestellt?

284. Zu welchem Zinsfuß muß ein Kapital von 26 400 DM angelegt werden, um von den Zinsen eine monatliche Miete in Höhe von 198 DM zahlen zu können?

285. Ein Industrieunternehmen muß für die Auszahlung der Löhne und Gehälter 3 Tage vor dem Zahltag das nötige Geld bei der Bank aufnehmen. Bei 4% Verzinsung beträgt der Zinsverlust 1 725,83 DM. Wieviel Geld wurde bei der Bank abgehoben?

10. Die Brutto-, Netto-, Tararechnung

Das Gewicht der reinen Ware nennt man **Reingewicht** oder **Nettogewicht.**

Das Gewicht der **Verpackung** (Kisten, Fässer usw.) nennt man **Tara.**

Das Gewicht der **Ware zuzüglich** der **Verpackung** nennt man **Gesamtgewicht** oder **Bruttogewicht.**

Das **Bruttogewicht** beträgt stets **100%.**

Ziehen wir das Gewicht der **Verpackung** vom **Gesamtgewicht** ab, so erhalten wir das **Reingewicht.**

Ziehen wir das **Reingewicht** vom **Gesamtgewicht** ab, so erhalten wir das Gewicht der **Verpackung.**

Zählen wir das Gewicht der **Verpackung** zum **Reingewicht,** so erhalten wir das **Gesamtgewicht.**

Merken Sie:

Brutto	**Brutto**	**Netto**
— **Tara**	— **Netto**	+ **Tara**
= **Netto**	= **Tara**	= **Brutto**

Angewandte Aufgaben

286. Eine Firma erhält 3 Kisten Seife, die 25,400 kg, $24\frac{1}{2}$ kg und 26,125 kg brutto wiegen. Die leeren Kisten wiegen 3,850 kg, 3,600 kg und $3\frac{3}{4}$ kg. Wieviel beträgt das gesamte Nettogewicht?

287. Drei Postpakete wiegen: $3\frac{5}{8}$ kg, 3,650 kg und $3\frac{1}{2}$ kg brutto, das Nettogewicht beträgt 2,900 kg, $2\frac{3}{4}$ kg und 2,725 kg. Wieviel beträgt die gesamte Tara?

288. Das Nettogewicht von 2 Sendungen beträgt 36,875 kg und 35,250 kg. Die Tara der ersten Sendung beträgt $4\frac{1}{2}$ kg, die der zweiten $4\frac{1}{4}$ kg. Berechnen Sie das gesamte Bruttogewicht!

289. Ein Gemüsehändler kauft 6 Kisten Äpfel. Jede Kiste wiegt brutto 60 kg, die Tara beträgt $6\frac{2}{3}\%$. Ein Zentner Äpfel kostet 56 DM. Wieviel hat der Händler zu zahlen?

290. Ein Kaufmann erhielt ein Faß Butter, das mit 108,80 DM (Nettopreis) in Rechnung gestellt war. Die Tara betrug $11\frac{1}{9}\%$. 1 kg Butter kostet 6,80 DM. Wieviel betrug das Bruttogewicht?

291. Eine Sendung Ware wog laut Frachtbrief 220 kg und war mit 136 DM in Rechnung gestellt. 1 kg Ware (netto) kostete 0,68 DM. Wieviel % betrug die Tara?

11. Die Gewinn- und Verlustrechnung

Den Preis, den ein Kaufmann für seine Ware zahlen muß, nennt man **Einkaufspreis.**

Zählt man zum Einkaufspreis die entstandenen **Spesen** (Reisekosten, Fernsprechgebühren, Briefporto, Fracht, Verpackung usw.), so erhält man den **Bezugspreis.**

Zählt man zum Bezugspreis noch die **Geschäftskosten** (Ladenmiete, Heizung, Beleuchtung, Löhne und Gehälter, Steuern, Versicherung, Werbung usw.), so erhält man den **Selbstkostenpreis.** Dieser ist als Grundwert stets **100%**.

Zählt man zum **Selbstkostenpreis** den **Gewinn,** so erhält man den **Verkaufspreis.**

Merken Sie:

Einkaufspreis	+ **Spesen**	= **Bezugspreis**
Bezugspreis	+ **Geschäftskosten**	= **Selbstkostenpreis**
Selbstkostenpreis	+ **Gewinn**	= **Verkaufspreis**

Unter gewissen Umständen, z. B. bei beschädigter oder leichtverderblicher Ware, beim Sommer- und Winterschlußverkauf oder beim Räumungsausverkauf, muß der Kaufmann seine Ware mit **Verlust** verkaufen.

Zieht man vom **Selbstkostenpreis** den **Verlust** ab, so erhält man ebenfalls den **Verkaufspreis.**

Merken Sie:

Selbstkostenpreis — Verlust = Verkaufspreis

Angewandte Aufgaben

292. Ein Kaufmann erhält eine Sendung Ware im Werte von 1 432 DM. Die Spesen betragen 18,40 DM, die Geschäftskosten $12\frac{1}{2}\%$ des Bezugspreises, als Gewinn werden 10% der Selbstkosten zugeschlagen. Berechnen Sie a) den Bezugspreis, b) den Selbstkostenpreis, c) den Verkaufspreis!

293. Für eine Wiese zahlt ein Bauer jährlich 108 DM Pacht. Den Heuertrag verkauft er für 156,60 DM. Wieviel % beträgt der Gewinn?

294. Ein Kraftwagen, der neu 6 750 DM kostete, muß für 4 500 DM abgestoßen werden. Wieviel % beträgt der Verlust?

295. Ein Wirt kauft 60 l Wein für 288 DM und will $33\frac{1}{3}\%$ daran verdienen. Wieviel kostet nun 1 Flasche ($\frac{3}{4}$ l) im Verkauf?

296. Der Preis eines Anzuges wurde beim Ausverkauf um 35% herabgesetzt und betrug jetzt 187,20 DM. Wieviel kostete der Anzug früher?

12. Die Rabatt- und Skontorechnung

Der **Rabatt** ist ein **in Prozenten ausgedrückter Preisnachlaß,** der bei **Barzahlung, beim Bezug größerer Mengen** oder **bei Beschädigung von Waren** gewährt wird.

Zieht man den **Rabatt** von der **Kaufsumme** ab, so erhält man den **Barzahlungsbetrag.**

Merken Sie:

Kaufsumme — Rabatt = Barzahlungsbetrag

Wird eine Ware vom Käufer vor dem vereinbarten Termin bezahlt, so gewährt der Verkäufer sehr oft einen **Nachlaß,** den man **Skonto** nennt.

Zieht man den **Skontobetrag** vom **Rechnungsbetrag** ab, so erhält man den **Barzahlungsbetrag.**

Merken Sie:

Rechnungsbetrag — Skonto = Barzahlungsbetrag

Angewandte Aufgaben

297. Eine Rechnungssumme beträgt 316,75 DM, der Rabatt 12%. Berechnen Sie die Barzahlung!

298. Eine zweite Rechnungssumme beträgt 156,00 DM, der Rabatt 19,50 DM. Wieviel % beträgt der Rabatt?

299. $2\frac{1}{2}\%$ Rabatt betragen 3,25 DM. Berechnen Sie die Rechnungssumme!

300. Ein Weinhändler liefert: 25 Flaschen Moselwein zu 3,75 DM, 15 Flaschen Rheinwein zu 4,30 DM und 10 Flaschen Rotwein zu 3,95 DM. Für Glas und Verpackung berechnet er je Flasche 0,35 DM. Das Ziel beträgt 2 Monate. Da sofort bezahlt wird, gewährt er $2\frac{1}{2}\%$ Skonto (Nachlaß). Wieviel ist zu zahlen?

301. Ein Kaufmann erhält 3 Warensendungen: 32 kg Nudeln, 75 kg Mehl und 68 kg Zucker (alles brutto). Die Tara beträgt bei jeder Sendung $2\frac{1}{2}\%$. 1 kg Nudeln (netto) kostet 2,80 DM, 1 kg Mehl 1,10 DM, 1 kg Zucker 1,35 DM. Wieviel beträgt die Barzahlung, wenn 6% Rabatt gewährt werden?

302. Anstreicher erhalten beim Tapetenhändler eine Provision (Vermittlungsgebühr) von 10%. Es wurden verkauft: 25 Rollen Tapete zu 4,50 DM, 18 Rollen zu 3,25 DM und 32 Rollen zu 3,80 DM. Berechnen Sie die Barzahlung!

303. Im Schlußverkauf sind die Preise stark herabgesetzt. Alter Preis: 65,50 DM (96,60 DM, 142 DM, 228,75 DM), neuer Preis: 52,40 DM (72,45 DM, 99,40 DM, 152,50 DM). Wieviel % beträgt der Preisnachlaß?

304. Von einem Rechnungsbetrag von 476 DM werden 23,80 DM als Skonto abgezogen. Wieviel % sind das?

305. Bei Barzahlung wurden von einer Rechnung $3\frac{3}{4}\%$ als Skonto abgezogen, und zwar 16,50 DM. Berechnen Sie die Rechnungssumme!

306. Eine Rechnung wurde mit 791,30 DM bar bezahlt, der Skontosatz betrug $3\frac{1}{2}\%$. Wieviel beträgt der Skontobetrag?

13. Die Verhältnis- und Gesellschaftsrechnung

13.1. Die Verhältnisrechnung

Zahlen können in einem bestimmten **Verhältnis** zueinander stehen; z. B. das **Torverhältnis** bei einem Fußballspiel betrug **3 : 2** (lies: 3 zu 2).

Das **Verhältnis** von Zahlen wird durch die **kleinsten ganzen Zahlen** ausgedrückt.

Die Zahlen werden entweder **gekürzt** oder **erweitert**, bis man die kleinsten ganzen Zahlen erhält.

Durch das Kürzen und Erweitern wird das **Verhältnis nicht geändert.**

Beispiel: a) 5 : 10 : 15 : 20 (gekürzt durch 5) = **1 : 2 : 3 : 4**

b) 0,3 : 0,4 : 0,5 : 0,6 (erweitert mit 10) = **3 : 4 : 5 : 6**

c) $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ (in Zwölftel erweitert) $= \frac{6}{12} : \frac{4}{12} : \frac{3}{12} = \mathbf{6 : 4 : 3}$

Übungsaufgabe 307

Geben Sie das Verhältnis in den kleinsten ganzen Zahlen an!

a) Klasse A hat 40, Klasse B 45 Schüler.

b) Fritz ist $10\frac{1}{2}$, Peter $3\frac{1}{2}$ Jahre alt.

c) Georg ist 144, Paul 132 cm groß.

d) A arbeitet täglich 9, B $8\frac{1}{2}$ Stunden.

e) Beim Zahlenlotto gewann A 35, B 40 und C 600 DM.

Angewandte Aufgaben

Geben Sie in folgenden Aufgaben das Verhältnis an!

308. Der Mount Everest ist 8 800 m, der Mont Blanc 4 800 m, der Großglockner 3 800 m, die Zugspitze 3 000 m, die Schneekoppe 1 600 m und der Brocken 1 200 m hoch.

309. Der Mississippi ist 6 700 km, die Wolga 3 700 km, die Donau 2 850 km, der Rhein 1 250 km, die Elbe 1 200 km und die Oder 900 km lang.

310. Fünf Grundstücke haben folgende Flächeninhalte: 4,8 ha, 8,4 ha, 15,6 ha, 22,8 ha und 99,6 ha.

13.2. Die Gesellschaftsrechnung (Verteilungsrechnung)

Die **Verteilung** von Gewinn und Verlust, die Umlage von Kosten oder die Auszahlung von Dividenden erfolgt bei Wirtschaftsunternehmen, Einkäufen, Konkursen, Erbschaften usw., an denen mehrere Personen gemeinsam beteiligt sind, nach dem jeweils gegebenen Verhältnis — z. B. Anzahl der Personen oder Höhe der gezahlten Beträge (Aktien) — **durch die Verhältnisrechnung.**

Beispiel:

Vier Personen spielen gemeinsam in der Lotterie ein Los und gewinnen 200 000 DM. A hatte $\frac{1}{2}$ Los bezahlt, B $\frac{1}{4}$, C und D je $\frac{1}{8}$ Los. Wie verteilen sie den Gewinn?

Lösung:

$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{8} = \frac{4}{8} : \frac{2}{8} : \frac{1}{8} : \frac{1}{8} = 4 : 2 : 1 : 1$, das sind 8 Teile;

8 Teile = 200 000 DM — 1 Teil = 25 000 DM

A erhält 4 Teile = 100 000 DM — B erhält 2 Teile = 50 000 DM

C erhält 1 Teil = 25 000 DM — D erhält 1 Teil = 25 000 DM

Übungsaufgabe 311

a) Teilen Sie 864 DM im Verhältnis 3 : 4 : 5!

b) Teilen Sie 480 DM so, daß A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$ und C den Rest erhält!

c) Teilen Sie 24 DM so unter 3 Personen, daß A 3 DM mehr und B 3 DM weniger als C erhält!

d) Teilen Sie 210 DM so unter 3 Personen, daß A 25% und B 50% vom Anteil des C erhält!

e) Teilen Sie 125 DM so unter 3 Personen, daß B 3mal soviel erhält wie A und C doppelt soviel wie B und dazu noch 5 DM!

Angewandte Aufgaben

312. Drei Arbeiter erhalten für eine gemeinsame Arbeit 1 060 DM. Der erste arbeitete 8, der zweite 7 und der dritte 10 Tage zu je 8 Stunden. Wie teilen sich die Arbeiter den Lohn?

313. Drei Kaufleute machten gemeinschaftlich ein Geschäft. A gab dazu 22 200 DM, B 33 300 DM und C 44 400 DM. Sie erzielten einen Gewinn von 46 800 DM. Wie teilten sie diesen?

314. Vier Landwirte bezogen gemeinschaftlich 6 000 kg Kunstdünger. 1 dz kostete einschließlich Fracht und Anfuhr 32,75 DM. A erhielt $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{4}$, C $\frac{1}{5}$ und D den Rest. Wieviel mußte jeder zahlen?

315. Ein Kaufmann gerät in Konkurs. In der Konkursmasse sind noch 14 400 DM. An Gerichtskosten gehen 5% ab. Die drei Gläubiger hatten zu fordern: 2 500 DM, 7 500 DM und 5 000 DM. Wie werden die Ansprüche der Gläubiger abgegolten?

316. An einem Unternehmen sind A mit 30 000 DM, B mit 35 000 DM, C mit 40 000 DM und D mit 45 000 DM beteiligt. Bei der Auflösung des Unternehmens wird ein Verlust von 27 900 DM festgestellt. Wieviel DM erhält jeder Teilnehmer zurück?

317. Eine Erbschaft wird im Verhältnis $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ aufgeteilt. Der Erbe mit dem kleinsten Anteil erhält 2 400 DM. Wie groß war die Erbschaft?

318. Ein Vater vermachte in seinem Testament seinen 4 Kindern ein Vermögen, von dem die beiden Söhne je $\frac{2}{10}$ und die beiden Töchter je $\frac{3}{10}$ erhalten sollen. Die beiden Söhne und eine Tochter haben zum Studium bzw. zur Aussteuer bereits je 4 000 DM erhalten, die andere Tochter soll neben dem ihr zustehenden Erbteil für die langjährige Pflege des Vaters noch 5 000 DM erhalten. Wie groß ist das Erbteil jedes Kindes, wenn beim Tode des Vaters noch 45 000 DM vorhanden waren?

14. Die Durchschnitts- und Mischungsrechnung

14.1. Die Durchschnittsrechnung

Die **Durchschnittsrechnung** ist eine Rechnungsart, bei der die **durchschnittlichen Werte** ermittelt werden.

Man findet die **Durchschnittszahl** (das **arithmetische Mittel**) mehrerer Zahlen, indem man ihre **Summe durch** ihre **Anzahl** teilt.

Beispiel: $6 + 4 + 7 + 3 = 20$ $\qquad 20 : 4 = 5$

Die **Summe der** vier **Zahlen** ist 20.

Wir teilen die Summe (20) durch die **Anzahl der Zahlen** (4) = 5.

Die **Durchschnittszahl** heißt **5.**

Merken Sie:

$$\textbf{Durchschnittszahl} = \frac{\textbf{Summe}}{\textbf{Anzahl}}$$

Angewandte Aufgaben

319. In den 8 Klassen einer Volksschule sind 48, 45, 52, 43, 56, 44, 57 und 47 Schüler. Berechnen Sie die durchschnittliche Klassenstärke!

320. In einem Warenhaus betrugen im Laufe einer Woche die Tageseinnahmen: 17 640,62 DM, 16 830,93 DM, 15 350,86 DM, 16 490,65 DM, 21 370,41 DM, 18 530,57 DM. Wie groß war die durchschnittliche Tageseinnahme?

321. Für Gas, Licht und Wasser wurden in den einzelnen Monaten des Jahres bezahlt: 36,40 DM, 35,00 DM, 33,80 DM, 32,80 DM, 32,00 DM, 31,20 DM, 25,60 DM, 30,60 DM, 32,40 DM, 33,80 DM, 35,60 DM, 39,20 DM. Wieviel wurde durchschnittlich im Monat bezahlt?

322. Für eine Arbeit wurden in Rechnung gestellt: $42\frac{1}{2}$ Meisterstunden zu 9,20 DM, 48 Gesellenstunden zu 4,80 DM, $47\frac{1}{2}$ Hilfsarbeiterstunden zu 4,20 DM und 42 Lehrlingsstunden zu 1,70 DM. Wie hoch wurde 1 Stunde im Durchschnitt berechnet?

14.2. Die Mischungsrechnung

Eine im Handel sehr gebräuchliche Rechnungsart ist die **Mischungsrechnung.**

Bei der **Mischungsrechnung** suchen wir:

den **Mischungspreis** (Durchschnittspreis),
dann ist das **Mischungsverhältnis** gegeben, oder
das **Mischungsverhältnis,**
dann ist der **Mischungspreis** gegeben.

a) Wir suchen den Mischungspreis

Beispiel: Es werden gemischt: 5 kg zu 4,80 DM und 4 kg zu 3,50 DM. Wieviel kostet 1 kg Mischung?

Ausrechnung:

5 kg zu 4,80 DM kosten 24 DM
4 kg zu 3,50 DM kosten 14 DM

9 kg Mischung kosten 38 DM
1 kg Mischung kostet 38 DM : 9 = **4,22 DM**

b) Wir suchen das Mischungsverhältnis

Beispiel: Zwei Sorten, 1 kg zu 1,60 DM und 1 kg zu 2,60 DM, sollen so gemischt werden, daß 1 kg der Mischung 2,00 DM kostet. In welchem Verhältnis muß gemischt werden?

Ausrechnung:

		Mischungspreis	
1. Sorte:	1 kg zu 1,60 DM	2,00 DM	**Gewinn** = 0,40 DM
2. Sorte:	1 kg zu 2,60 DM	2,00 DM	**Verlust** = 0,60 DM

Der Gewinn und der Verlust haben den gemeinsamen Preisanteil: 0,20 DM.

Die 0,40 DM Gewinn sind 2 Preisanteile,

die 0,60 DM Verlust sind 3 Preisanteile.

Gewinn und Verlust stehen also im Verhältnis 2 : 3.

Um Gewinn und Verlust auszugleichen, müssen die **Mengen im umgekehrten Verhältnis** gemischt werden, also:

1. Sorte:	**2 Preisteile**	**3 Mengenteile**
2. Sorte:	**3 Preisteile**	**2 Mengenteile**

Die Mengen stehen im Verhältnis 3 : 2.

Probe:	1. Sorte:	3 kg zu 1,60 DM	= 4,80 DM
	2. Sorte:	2 kg zu 2,60 DM	= 5,20 DM
		5 kg Mischung	= 10,00 DM
		1 kg Mischung	= 10,00 DM : 5 = **2,00 DM**

Bei der **Mischungsrechnung** unterscheiden wir:

Warenmischungen, Flüssigkeitsmischungen und **Metallmischungen.**

14.2.1. Warenmischungen

Um Güte (Qualität) und Preis einer Ware zu ändern, mischt der Kaufmann zwei oder mehrere Sorten z. B. Kaffee, Tee, Tabak.

Das **Mischungsverhältnis** der einzelnen Sorten bestimmt die **Qualität** und den **Preis** der Mischsorte.

Angewandte Aufgaben

323. Mischen Sie 2 kg Kaffee zu je 20,50 DM mit 3 kg Kaffee zu je 26,50 DM. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?

324. Mischen Sie $4\frac{1}{2}$ kg Hühnerfutter zu je 0,64 DM und $7\frac{1}{2}$ kg Hühnerfutter zu je 0,48 DM. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?

325. Ein Händler mischt $5\frac{3}{4}$ kg Apfelringe, das kg zu 2,00 DM, $4\frac{1}{2}$ kg Dörrpflaumen, das kg zu 1,70 DM, $3\frac{1}{4}$ kg Birnen, das kg zu 2,20 DM, und $2\frac{1}{2}$ kg Aprikosen, das kg zu 2,70 DM. Wieviel kostet 1 kg der Mischung?

326. Ein Händler mischt 24 kg zu je 4,50 DM mit 16 kg zu je 3,50 DM; er will an der Mischung $12\frac{1}{2}$% verdienen. Wie teuer ist dann 1 kg der Mischung im Verkauf?

327. 8 kg Tabak zu je 22,50 DM werden mit 3 kg Tabak zu je 18 DM gemischt Wieviel % beträgt der Gewinn, wenn der Verkaufspreis für 1 kg 23,40 DM beträgt?

328. Es werden gemischt: 100 kg zu je 4,80 DM, 80 kg zu je 4,00 DM und 60 kg einer 3. Sorte. 1 kg der Mischung kostet 5,00 DM. Wieviel kostet 1 kg der 3. Sorte?

329. Es werden gemischt: eine Sorte zum Preise von 12,60 DM und eine Sorte zum Preise von 10,40 DM je kg. Der Preis der Mischung soll 11,20 DM je kg betragen. Bestimmen Sie das Mischungsverhältnis!

330. Ein Kaufmann hat 20 kg Kaffee zu je 25,20 DM. Von einer 2. Sorte, die nur 21,60 DM kostet, will er hinzumischen, so daß 1 kg Mischkaffee 24 DM kostet. Wieviel kg der 2. Sorte muß er nehmen?

14.2.2. Flüssigkeitsmischungen

Auch Flüssigkeiten (z. B. Spiritus, Essig, Wein) mischt der Kaufmann, um **Qualität** und **Preis** der Ware zu ändern.

Angewandte Aufgaben

331. Wieviel Liter Alkohol sind enthalten:
a) in 40 l Spiritus von 80%, b) in 60 l Branntwein von 48%?

332. Ein Brenner mischt 25 l Doppelkorn von 48% mit 15 l von 40%. Wieviel % hat nun der Doppelkorn?

333. Ein Kaufmann mischt 40 l Spiritus zu 80%, 30 l Spiritus zu 60% und 10 l Wasser. Wieviel % hat die Mischung?

334. Wir mischen 70 l Spiritus zu 80% mit 30 l zu 60%. 100 l reiner Alkohol (100%) kosten 250 DM. Wieviel kostet 1 l der Mischung?

335. Ein Händler schüttet in 1 hl 100%igen Essig 20 l Wasser. Wieviel % hat nun der Essig?

336. Wieviel Liter Wasser muß man in 60 l reinen Alkohol schütten, wenn die Mischung 80%ig werden soll?

337. Ein Moselwein zu 3,60 DM soll mit einem anderen Moselwein zu 2,40 DM gemischt werden, so daß 1 Liter der Mischung 2,90 DM kostet. Bestimmen Sie das Mischungsverhältnis!

338. Ein Weinhändler verschneidet 750 l Rheinwein, 1 l zu 2,40 DM, mit 150 l Südwein, 1 l zu 3,60 DM. Er will $33\frac{1}{3}\%$ verdienen. Wieviel kostet nun eine Flasche ($\frac{3}{4}$ l) Weinverschnitt?

14.2.3. Metallmischungen (Legierungen)

Auch Metalle können gemischt werden. Diese Metallmischungen nennt man **Legierungen.** Aus Kupfer und Zink stellt man **Messing** her, aus Kupfer und Zinn **Bronze,** aus Kupfer, Zinn und Nickel **Neusilber.** — **Edelmetalle** (Gold und Silber) werden, da sie für den Gebrauch zu weich sind, häufig mit Kupfer gemischt.

Das in der Legierung enthaltene Edelmetall bezeichnet man mit **Feingewicht** oder **Feingehalt.** Der Feingehalt wird in Tausendstel angegeben und ist durch **Stempelaufdruck** angezeigt (585 Feingehalt = 585 Teile Gold und 415 Teile Kupfer).

Angewandte Aufgaben

339. Eine Legierung enthält 100 g Silber und 25 g Kupfer. Wie groß ist der Feingehalt?

340. Neusilber hat ein Legierungsverhältnis von 13 : 4 : 3. Wieviel g Kupfer, Zinn und Nickel enthält ein Zigarettenetui von 120 g Gewicht?

341. Ein Dutzend silberne Löffel wiegt 780 g und ist 800 gestempelt. Wieviel g Silber enthält 1 Löffel?

342. Eine silberne Dose mit einem Feingehalt von 900 enthält 108 g reines Silber. Wie schwer ist die Dose?

343. Ein Trauring trägt den Stempelaufdruck 585 und wiegt 8 g. Wieviel g Gold enthält der Ring?

344. Unsere Goldmünzen vor dem Ersten Weltkrieg hatten einen Feingehalt von 900. Das Zwanzigmarkstück wog 7,965 g. Wieviel reines Gold war im Zwanzigmarkstück?

345. Eine goldene Kette mit einem Feingehalt von 900 wog 80 g. Wieviel kostete die Kette, wenn 1 kg reines Gold 5 100 DM kostete und der Goldschmied für die Anfertigung 25% des Goldwertes berechnete?

346. 187,5 g Gold mit einem Feingehalt von 800 sollen durch Zusatz von Kupfer in eine Legierung mit 750 Feingehalt umgewandelt werden. Wieviel g Kupfer muß der Goldschmied hinzufügen?

DIE RAUMLEHRE

15. Flächenberechung

15.1. Grundbegriffe

In der Raumlehre (Geometrie) arbeitet man mit folgenden **Grundbegriffen:**

Punkt, Linie, Fläche, Körper.

Der **Punkt** hat raumkundlich (geometrisch) **keine Ausdehnung;** er ist nur eine gedachte Stelle im Raum und wird erst sichtbar als Schnittpunkt zweier Linien.

Die **Linie** ist ein in einer **bestimmten Richtung** fortbewegter **Punkt;**
sie hat **eine Ausdehnung:** die **Länge.**

Die **Fläche** ist eine in einer **zweiten Richtung** fortbewegte **Linie;**
sie hat **zwei Ausdehnungen:** die **Länge** und die **Breite.**

Der **Körper** ist eine in einer **dritten Richtung** fortbewegte **Fläche;**
er hat **drei Ausdehnungen:** die **Länge,** die **Breite** und die **Höhe.**

15.2. Linien

Man unterscheidet **gerade** und **krumme Linien.**

Linien, deren Richtung stets unverändert bleibt, sind **gerade Linien.**
Linien, deren Richtung sich dauernd ändert, sind **krumme Linien.**

15.2.1. Gerade Linien

Bei geraden Linien unterscheiden wir eine **dreifache Richtung:**

waagerecht (horizontal),

senkrecht oder **lotrecht** (vertikal),

schräg (weder waagerecht noch senkrecht).

Eine gerade Linie, die in einem Viereck von einer Ecke zur anderen verläuft, ist eine **Ecklinie** oder **Diagonale;** die Richtung nennen wir **diagonal.**

Zwei gleichlaufende gerade Linien, deren senkrechter Abstand überall gleich ist, nennt man **parallele Linien** (Gleislinien) oder **Parallelen.**

Die **kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten** ist die **gerade Linie.**

Bei den **geraden Linien** unterscheiden wir ferner:

Strecke **Strahl** **Gerade**

Die **Strecke** ist **zweiseitig begrenzt,**
der **Strahl** ist **einseitig begrenzt,**
die **Gerade** ist **unbegrenzt.**

Unser **Normal-Längenmaß** ist das **Meter (m).**

1 m ist der vierzigmillionste Teil des Erdumfangs (40 000 km).

Unsere Längenmaße heißen:

km		m		dm		cm		mm
1 km	=	**1 000 m**	=	10 000 dm	=	100 000 cm	=	1 000 000 mm
		1 m	=	**10 dm**	=	100 cm	=	1 000 mm
				1 dm	=	**10 cm**	=	100 mm
						1 cm	=	**10 mm**

Die Verwandlungszahl der Längenmaße ist 10,

d. h., ein Stellenwert ist immer **das Zehnfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

Übungsaufgabe 347

a) Schreiben Sie als m:

52 cm   4 cm   2 m 8 cm   12 mm   3 cm 8 mm

b) Schreiben Sie als km:

405 m   80 m   5 m   6 km 75 m   9 km 3 m

15.2.2. Krumme Linien

Bei den **krummen Linien** unterscheiden wir u. a.:

Bogen, Ellipse und **Kreislinie.**

15.3. Winkel

Treffen zwei Strahlen in einem Punkt zusammen, so entsteht ein **Winkel.**

Die beiden Strahlen, die den Winkel bilden, heißen **Schenkel.**

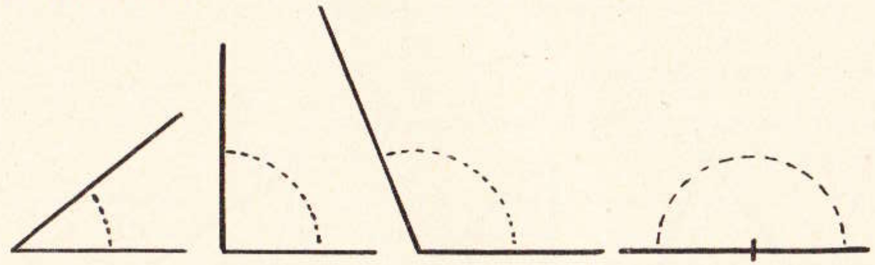
Der Schnittpunkt der Strahlen heißt **Scheitel.**

Das **Zeichen für Winkel** ist $\sphericalangle$.

Die Winkel kann man mit einem **Winkelmesser** messen.

Ein **Winkelmesser** ist ein **Halbkreisbogen** mit einer **Winkeleinteilung** von 1 bis 180°.

Man unterscheidet:



spitze Winkel 1 bis 89°   rechte Winkel 90°   stumpfe Winkel 91 bis 179°   gestreckte Winkel 180°

Die **Größe eines Winkels** hängt von der **Neigung der Schenkel** ab.

Je größer die Neigung der Schenkel zueinander, **desto kleiner** ist **der Winkel.**

Ein Winkel, bei dem die Schenkel senkrecht aufeinander stehen, ist ein **rechter Winkel.**

Ein **rechter Winkel (1 R)** ist immer **90°** groß.

Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter (1 bis 89°), ist ein **spitzer Winkel.**

Ein Winkel, der größer ist als ein rechter (91 bis 179°), ist ein **stumpfer Winkel.**

Ein Winkel, dessen Schenkel eine Gerade bilden, ist ein **gestreckter Winkel** (180°).

Ein Winkel, der größer ist als ein gestreckter, ist ein erhabener oder **überstumpfer Winkel.**

Winkelgrade können unterteilt werden in **Minuten** und **Sekunden.**

1 Grad (1°) = **60 Minuten** (60′) **1 Minute** = **60 Sekunden** (60″)

Merken Sie:

Die Summe der Winkel auf einer Geraden beträgt 180°.
Die Summe der Winkel um einen Punkt beträgt 360°.

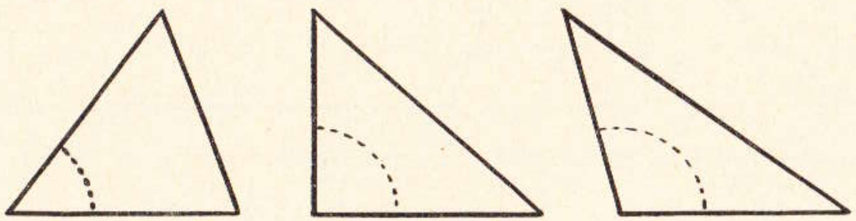
15.4. Geradlinige Flächen

Geradlinige Flächen werden von **geraden Linien** begrenzt.

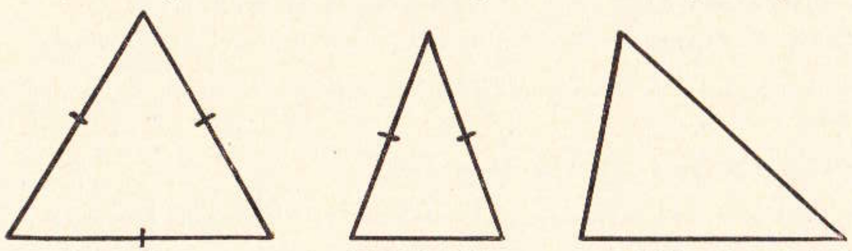
Nach der Zahl der Ecken unterscheiden wir **Dreiecke, Vierecke** und **Vielecke.**

15.4.1. Arten der Dreiecke

Ein **Dreieck** ist eine von **drei Seiten** begrenzte **Fläche.**



spitzwinkliges rechtwinkliges stumpfwinkliges



gleichseitiges gleichschenkliges ungleichseitiges Dreieck

Je nach **Länge der Seiten** und **Größe der Winkel** unterscheidet man

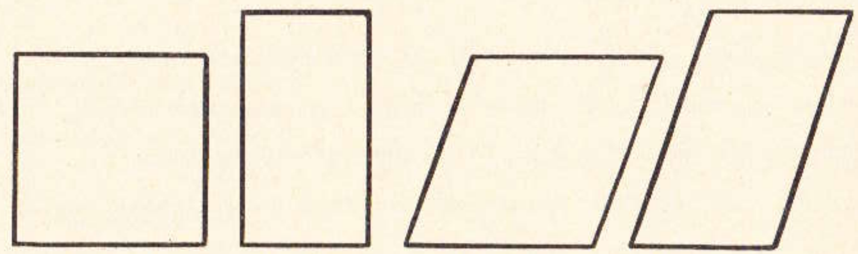
spitzwinklige Dreiecke:	3 spitze Winkel
rechtwinklige Dreiecke:	1 rechter und 2 spitze Winkel
stumpfwinklige Dreiecke:	1 stumpfer und 2 spitze Winkel
gleichseitige Dreiecke:	3 gleiche Seiten
gleichschenklige Dreiecke:	2 gleiche Seiten
ungleichseitige Dreiecke:	3 ungleiche Seiten

15.4.2. Arten der Vierecke

Ein **Viereck** ist eine von **vier Seiten** begrenzte Fläche.

Sind in einem Viereck die **gegenüberliegenden Seiten parallel,** so ist das Viereck ein **Parallelogramm;** in ihm sind **die gegenüberliegenden Seiten und Winkel gleich.**

Zu den Parallelogrammen zählen:



Quadrat Rechteck Rhombus Rhomboid

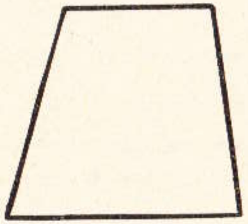
Ein **Quadrat** ist ein Viereck mit **gleichen Seiten** und **gleichen Winkeln.**

Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und **gleichen Winkeln.**

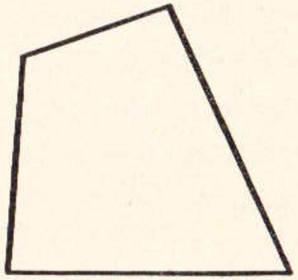
Ein **Rhombus** ist ein Viereck mit **gleichen Seiten** und **ungleichen Winkeln.**

Ein **Rhomboid** ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und **ungleichen Winkeln.**

Außer den **Parallelogrammen,** die **zwei Paar parallele Seiten** haben, gibt es noch zwei andere Vierecke:



Trapez



Trapezoid

Ein **Trapez** ist ein Viereck mit **vier ungleichen Seiten,** von denen **zwei parallel** sind.

Ein **Trapezoid** ist ein **ungleichseitiges Viereck ohne parallele Seiten.**

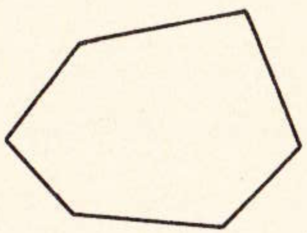
15.4.3. Arten der Vielecke

Eine geometrische Fläche mit mehr als vier Ecken nennt man **Vieleck.**

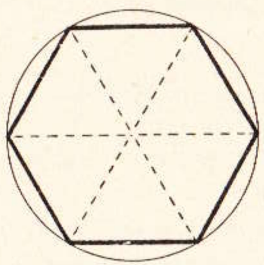
Sind die Seiten und Winkel ungleich, so ist es ein **unregelmäßiges Vieleck.**

Sind die Seiten und Winkel gleich, so ist es ein **regelmäßiges Vieleck.**

Nach der Anzahl der Ecken unterscheidet man **Fünf-, Sechs-, Achtecke** usw.



Unregelmäßiges Vieleck



Regelmäßiges Vieleck

15.4.4. Flächenmaße

Unsere Flächenmaße heißen:

km²		**ha**		**a**		**m²**
dm²		**cm²**		**mm²**		
1 km²	=	**100 ha**	=	10 000 a	=	1 000 000 m²
		1 ha		**100 a**		10 000 m²
				1 a	=	**100 m²**
1 m²	=	**100 dm²**	=	10 000 cm²	=	1 000 000 mm²
		1 dm²	=	**100 cm²**	=	10 000 mm²
				1 cm²	=	**100 mm²**

Die Verwandlungszahl der Flächenmaße ist 100,
d. h., ein Stellenwert ist immer **das Hundertfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

In der Landwirtschaft ist noch der **„Morgen"** gebräuchlich.

1 Morgen = **25 a** (ungefähr) = $\frac{1}{4}$ **ha**

Übungsaufgabe 348

a) Verwandeln Sie in cm²!
5 m² 1,4536 m² 0,5 m² 3 dm² 5,25 dm²

b) Verwandeln Sie in m²!
5 326 cm² 80 cm² 2,52 a 5,2 ha 0,57 km²

c) Verwandeln Sie in a!
2 550 m² 85 m² 8 m² 375 ha 0,25 ha

d) Verwandeln Sie in ha!
450 a 26 a 5 a 23 a 50 m² 5 a 50 m²

e) Verwandeln Sie in km²!
3 475 000 m² 56 380 a 7 395 ha 4 503 a 365 490 m²

f) Ein Marktplatz ist 75 945 m² groß. a) Wieviel a, b) wieviel ha sind das?

g) Ein Kartoffelfeld ist 250 a groß. a) Wieviel ha, b) wieviel m^2 sind das?

h) Ein Wald umfaßt 5,85 ha. a) Wieviel a, b) wieviel m^2 sind das?

i) Der Bodensee ist 539 km^2 groß. Wieviel ha sind das?

k) Die Bundesrepublik hat eine Größe von 24 800 000 ha. Wieviel km^2 sind das?

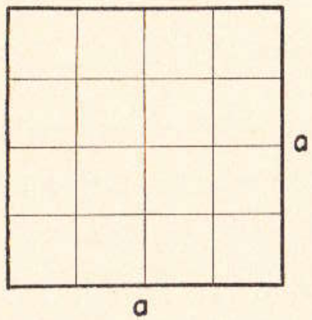
l) Zum Dorfe A gehören 85,06 ha Wiesenland, $275\frac{1}{2}$ ha Ackerland, 75,4 a Wald, 180,50 ha Heide und 1 236 a Gartenland. Wieviel m^2 sind das zusammen?

m) Von einem 8,9 a großen Baugrundstück werden 54 m^2 für den Bürgersteig abgegeben. Wieviel m^2 hat das Restgrundstück?

n) Ein Grundstück von 4 500 m^2 wird gegen ein Grundstück von 54 a eingetauscht. Wieviel DM müssen zugezahlt werden, wenn 1 m^2 mit 26,50 DM berechnet wird?

o) Ein Wiesenland ist 4,75 ha groß. Wieviel Morgen sind das?

15.4.5. Das Quadrat



$$U = a + a + a + a \quad \text{oder} \quad U = 4 \cdot a$$

$$F = a \cdot a \quad \text{oder} \quad F = a^2$$

U = Umfang F = Flächeninhalt
a = Seite

Das **Quadrat** ist ein Viereck mit **4 gleichen Seiten** und **4 rechten Winkeln.**

15.4.5.1. Die Berechnung des Umfangs

Der **Umfang des Quadrates** ist gleich der **Summe der Seiten.**

Wenn die Seite eines Quadrates 4 cm beträgt, dann ist der Umfang, da die 4 Seiten gleich lang sind: 4 cm · 4 = 16 cm

Umfang = Seite · 4 $\qquad U = a \cdot 4$

Umkehrung:

Wenn man den **Umfang durch 4** dividiert, erhält man die Länge der **Seite:** 16 cm : 4 = 4 cm.

Seite = Umfang : 4 $\qquad a = U : 4$

15.4.5.2. Die Berechnung des Flächeninhalts

Der **Flächeninhalt des Quadrates** ist gleich dem **Produkt der Seiten.**

Bei einem Quadrat von 4 cm Seitenlänge kann man auf die Grundseite nebeneinander 4 Quadratzentimeter stellen. Da die anderen Seiten auch 4 cm lang sind, kann man 4 Reihen von je 4 cm^2 aufeinanderstellen.

Der Flächeninhalt ist also: 4 cm · 4 cm = 16 cm^2.

Flächeninhalt = Seite · Seite $\qquad F = a \cdot a$

Für **a · a** schreibt man auch **a^2**,
(lies: a hoch 2 oder a Quadrat). $\qquad F = a^2$

Angewandte Aufgaben

349. Ein quadratförmiges Zimmer von 4,57 m Seitenlänge soll als Abschluß der Tapete eine Leiste erhalten, von der das Meter 1,35 DM kostet. Wieviel kostet die Leiste?

350. Ein quadratischer Unterrichtsraum mit 4,32 m Seitenlänge soll mit Pegulan belegt werden. Wieviel kostet der Fußbodenbelag, wenn 1 m^2 mit 13,50 DM berechnet wird?

351. Der Umfang eines quadratförmigen Hofes beträgt 64,76 m. Wieviel beträgt der Flächeninhalt?

352. In wieviel Quadrate von 3 cm Seitenlänge kann man ein Quadrat von 24 cm Seitenlänge zerlegen?

353. Ein Bauer kauft eine quadratische Wiese von 65 m Seitenlänge und zahlt für 1 a 350 DM. Wieviel kostet die Wiese?

354. Ein quadratförmiges Feld ist 36 m lang. Für wieviel DM Kartoffeln erntet man, wenn man auf 1 a 125 kg rechnet und 1 dz 36 DM kostet?

355. Eine Spülnische hat 70 quadratische Wandplatten von 15 cm Seitenlänge. Wieviel m² sind mit Platten bedeckt?

356. Ein Bürgersteig hat 6 Reihen von je 50 quadratischen Steinplatten mit 35 cm Seitenlänge. Wieviel m² umfaßt der Bürgersteig?

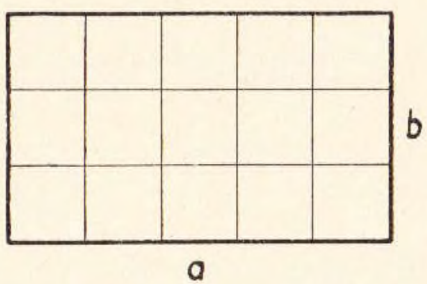
357. Ein quadratförmiger Hof von 13,50 m Seitenlänge wird gepflastert. Wie teuer ist die Pflasterung, wenn 1 m² mit 28,50 DM berechnet wird?

358. Ein Fenster hat 12 quadratische Scheiben mit einer Seitenlänge von 38 cm. Wieviel m² Glas werden für 6 Fenster benötigt?

359. Der Fußboden eines quadratischen Raumes von 3,60 m Seitenlänge soll mit quadratischen Steinfliesen von 30 cm Seitenlänge belegt werden. Wieviel Fliesen werden benötigt?

360. Ein quadratischer Garten mit einer Seitenlänge von 48 m ist durch einen Längs- und einen Querweg in 4 gleiche Stücke aufgeteilt. Rund um den Garten führt ebenfalls ein Weg. Alle Wege sind 1,20 m breit. Berechnen Sie die Gesamtfläche der 4 Gartenstücke!

15.4.6. Das Rechteck



$$U = 2\,(a + b)$$

$$F = a \cdot b$$

$$\frac{F}{b} = a \qquad \frac{F}{a} = b$$

a = **Länge** b = **Breite**

Ein **Rechteck** ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und rechten **Winkeln**.

Die gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks sind gleich, die vier Winkel sind rechte Winkel.

15.4.6.1. Die Berechnung des Umfangs

Der **Umfang des Rechtecks** ist gleich der **Summe der Seiten.**

Wenn die Länge eines Rechtecks 5 cm und die Breite 3 cm beträgt, dann ist der Umfang : 5 cm + 3 cm + 5 cm + 3 cm = 16 cm.

Man kann aber auch zwei anstoßende Seiten zusammenzählen und die Summe mit 2 multiplizieren : (5 cm + 3 cm) · 2 = 16 cm.

Umfang = Länge + Breite · 2 $$U = 2\,(a + b)$$

15.4.6.2. Die Berechnung des Flächeninhalts

Der **Flächeninhalt des Rechtecks** ist gleich dem **Produkt der angrenzenden Seiten.**

Wenn die Länge eines Rechtecks 5 cm beträgt, kann man 5 Quadratzentimeter darauf stellen. Bei einer Breite von 3 cm kann man 3 Reihen von je 5 cm² aufeinanderstellen.

Der Flächeninhalt ist also: 5 cm · 3 cm = 15 cm².

Flächeninhalt = Länge · Breite $$F = a \cdot b$$

Umkehrungen:

Wenn man den **Flächeninhalt durch** die **Breite** dividiert, erhält man die **Länge:**
15 cm² : 3 cm = 5 cm

Wenn man den **Flächeninhalt durch** die **Länge** dividiert, erhält man die **Breite:**
15 cm² : 5 cm = 3 cm.

Flächeninhalt : Breite = Länge $$\frac{F}{b} = a$$

Flächeninhalt : Länge = Breite $$\frac{F}{a} = b$$

Angewandte Aufgaben

361. Ein Grundstück ist 236 m lang und 148 m breit. Wie groß ist a) der Umfang, b) der Flächeninhalt?

362. Der Flächeninhalt eines Rechtecks beträgt 862,64 qm. Die Länge ist 32,8 m. Wie groß ist die Breite?

363. Der Flächeninhalt eines 25,4 m langen Gartens ist 401,32 m². Berechnen Sie den Umfang!

364. Der Umfang eines 15,80 m breiten Gartens beträgt 82,40 m. Wie groß ist der Flächeninhalt?

365. Ein Grundstück mit 136,40 m Länge und 74,60 m Breite soll eingezäunt werden. Wieviel kostet der Zaun, wenn das Meter mit 12,25 DM berechnet wird?

366. Ein Saal ist 25 m lang und 12,75 m breit. Von der Länge werden 5,80 m abgeteilt. Wie groß ist jetzt der Saal?

367. A bezahlt für ein Baugrundstück von 13,65 m Breite und 45,85 m Tiefe 48,50 DM je m². Die Anliegerkosten betragen 124,80 DM, der Strom-, Wasser- und Kanalanschluß 372,50 DM. Wieviel betragen die Gesamtkosten?

368. In einem Neubau werden 14 Fenster verglast: 6 Fenster mit je 8 quadratischen Scheiben von 35 cm Seitenlänge und 8 Fenster mit je 12 rechteckigen Scheiben von 42 cm Länge und 28 cm Breite. Wieviel kostet die Verglasung, wenn 1 m² mit 24,80 DM berechnet wird?

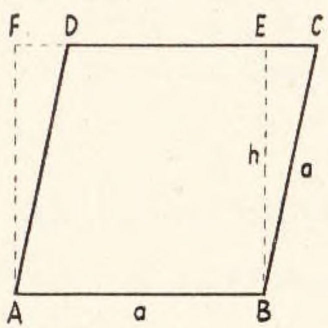
369. Ein Garten von 36,20 m Länge und 24,50 m Breite soll eine 30 cm dicke Mauer erhalten. Wie groß ist nun noch der Garten?

370. Ein Dienstzimmer ist 6,50 m lang, 5,75 m breit und 3,80 m hoch. Es soll tapeziert werden. Für Türen und Fenster werden 8 m² abgerechnet. Wieviel kostet das Tapezieren, wenn der Anstreicher 1 m² mit 3,50 DM berechnet?

371. Ein 38,50 m langes und 12,25 m breites Dach wird mit Dachpappe belegt. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag, wenn 1 m² Dachpappe 5,20 DM kostet und bei einem Stundenlohn von 7,80 DM 2 Gesellen 3 Tage zu 8 Stunden arbeiten?

372. Ein quadratförmiger Platz von 120 m Seitenlänge ist von einem 5 m breiten Weg umgeben, der mit Kies belegt werden soll. Auf 1 a rechnet man 3 Wagen Kies. Wieviel Wagen sind erforderlich?

15.4.7. Der Rhombus und das Rhomboid



$$U = 4 \cdot a \qquad F = a \cdot h$$

$$\frac{F}{h} = a \qquad \frac{F}{a} = h$$

a = Seite h = Höhe

Ein **Rhombus** (auch **Raute** und **verschobenes Quadrat** genannt) ist ein Viereck mit **gleichen Seiten** und **ungleichen Winkeln.**

Die Grundseite AB nennt man **Grundlinie** = **a.**

Den senkrechten Abstand zwischen zwei parallelen Seiten nennt man **Höhe** = **h**

15.4.7.1. Die Berechnung des Umfangs

Der **Umfang** des **Rhombus** ist wie beim **Quadrat** gleich der **Summe der Seiten.**

Umfang = Seite · 4 $$U = a \cdot 4$$

15.4.7.2. Die Berechnung des Flächeninhalts

Der **Flächeninhalt des Rhombus** ist gleich dem **Produkt von Grundlinie und Höhe.**

Wir schneiden auf der rechten Seite des Rhombus das Dreieck BCE ab und fügen es auf der linken Seite (ADF) wieder an. Dadurch entsteht ein **Quadrat.**

Der **Rhombus** ABCD ist gleich dem **Quadrat** ABEF; denn **Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.**

Man berechnet also den **Rhombus** wie ein **Quadrat.**

Flächeninhalt = Seite · Höhe $$F = a \cdot h$$

Umkehrungen:

Wenn man den **Flächeninhalt** durch die **Höhe** teilt, erhält man die **Grundlinie.**

Wenn man den **Flächeninhalt** durch die **Grundlinie** teilt, erhält man die **Höhe.**

Flächeninhalt : Höhe = Grundlinie $$\frac{F}{h} = a$$

Flächeninhalt : Grundlinie = Höhe $$\frac{F}{a} = h$$

15.4.7.3. Die Berechnung des Rhomboids

Ein **Rhomboid** (auch **Schiefeck** und **verschobenes Rechteck** genannt) ist ein Viereck mit **ungleichen Seiten** und **ungleichen Winkeln.**

Man berechnet das **Rhomboid** wie ein **Rechteck.**

Umfang = **Seite + Seite · 2** $U = 2\,(a + b)$

Flächeninhalt = **Seite · Höhe** $F = a \cdot h$

<u>Angewandte Aufgaben</u>

373. Die Grundlinie eines Rhombus beträgt 16,2 cm, die Höhe 14,8 cm. Berechnen Sie den Flächeninhalt!

374. Die Grundlinie eines Rhomboids beträgt 24,6, die Höhe 16,2 cm. Berechnen Sie den Flächeninhalt!

375. Der Inhalt eines 24,3 cm langen Rhombus beträgt 539,46 cm^2. Berechnen Sie die Höhe!

376. Der Inhalt eines Rhomboids beträgt 667,40 cm^2, die Höhe ist 23,5 cm. Wie lang ist die Grundlinie?

377. Ein Grundstück von 32,50 m Länge und 28,40 m Tiefe hat die Form eines Rhombus. 1 m^2 kostet 43,80 DM. Berechnen Sie den Kaufpreis!

378. Eine Wiese hat die Form eines Rhomboids. Die Länge beträgt 75,60 m, die Höhe 68,50 m, der Heuertrag 45 kg je a. Wieviel dz erntet man von der Wiese?

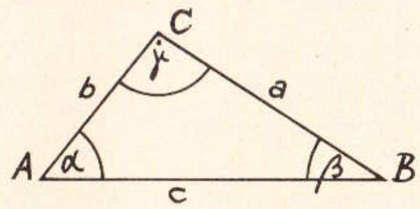
15.4.8. Das Dreieck

Das **Dreieck** ist eine von **drei Seiten** begrenzte Fläche mit **drei Ecken** und **drei Winkeln.**

Wir unterscheiden 6 Arten der Dreiecke:

spitzwinklige, rechtwinklige und **stumpfwinklige,**
gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige Dreiecke. (s. 15.4.1.)

15.4.8.1. Die Seiten, Winkel und Ecken im Dreieck



Die Seiten im rechtwinkligen Dreieck

Die beiden Seiten, die den rechten Winkel bilden, heißen **Katheten.**
Die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, ist die **Hypotenuse.**

Die Winkel im Dreieck

Wir addieren in den Dreiecken die Winkel und stellen fest, daß in allen Dreiecken die Winkel zusammen immer 180° betragen.

Merken Sie:

Die Summe der Winkel beträgt in jedem Dreieck 180°.

Die Ecken im Dreieck

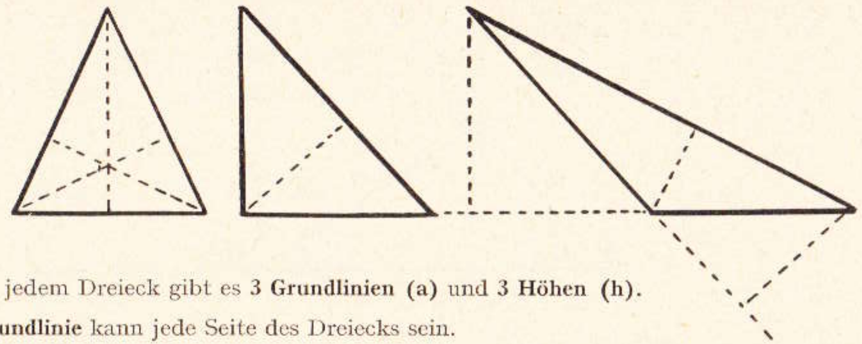
Die **Ecken** eines Dreiecks werden mit **A, B** und **C** bezeichnet.

Den **Ecken A, B, C** liegen die **Seiten a, b, c** gegenüber.

Den **Seiten a, b, c** liegen die **Winkel** α, β, γ gegenüber.

Alpha (α), Beta (β) und Gamma (γ) sind die Anfangsbuchstaben des griechischen Alphabets.

15.4.8.2. Die Dreieckshöhen



In jedem Dreieck gibt es **3 Grundlinien (a)** und **3 Höhen (h).**

Grundlinie kann jede Seite des Dreiecks sein.

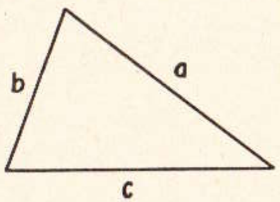
Die Senkrechte von der Spitze zur gegenüberliegenden Grundlinie ist die **Höhe.**

Im spitzwinkligen Dreieck gibt es drei Höhen; sie schneiden sich in einem Punkte.

Im rechtwinkligen Dreieck werden zwei Höhen durch die senkrecht aufeinanderstehenden Katheten gebildet.

Im stumpfwinkligen Dreieck liegen zwei Höhen außerhalb des Dreiecks.

15.4.8.3. Die Berechnung des Umfangs

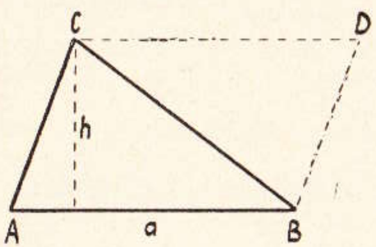


$$U = a + b + c$$

Der **Umfang des Dreiecks** ist gleich der **Summe der Seitenlängen.**

Umfang = Summe der Seiten $\qquad U = a + b + c$

Die Berechnung des Flächeninhalts



$$F = \frac{a \cdot h}{2}$$

$$a = \frac{2\,F}{h} \qquad h = \frac{2\,F}{a}$$

Wir schneiden aus Papier zwei gleich große Dreiecke (ABC **und** BCD) und legen das Dreieck BCD umgekehrt (mit der Spitze nach unten) neben das Dreieck ABC. Es entsteht ein **Rhomboid** (ABDC), das **doppelt so groß** ist **wie das Dreieck** ABC. Umgekehrt ist das **Dreieck** ABC **die Hälfte des Parallelogramms** ABDC, das die gleiche Grundlinie und die gleiche Höhe hat.

Wenn die Grundlinie eines Dreiecks 6 cm und die Höhe 4 cm lang ist, dann berechnet man den **Flächeninhalt,** indem man das dazugehörige Parallelogramm (= 2 Dreiecke) berechnet und das Ergebnis durch 2 dividiert.

$$\text{also: } \frac{6\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} = 12\text{ cm}^2$$

Flächeninhalt = Grundlinie · Höhe : 2 $\qquad F = \frac{a \cdot h}{2}$

Man kann den **Inhalt des Dreiecks** auch berechnen,
indem man die **halbe Grundlinie** mit der **Höhe** multipliziert,

$$\text{also: } \frac{6}{2}\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2 \qquad F = \frac{a}{2} \cdot h$$

oder indem man die **halbe Höhe** mit der **Grundlinie** multipliziert,

$$\text{also: } \frac{4}{2}\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = 12\text{ cm}^2 \qquad F = \frac{h}{2} \cdot a$$

Umkehrungen:

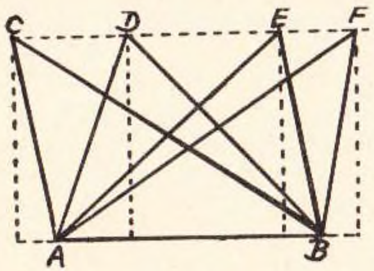
Man berechnet die **Grundlinie eines Dreiecks,**
indem man den **zweifachen Inhalt durch** die **Höhe** dividiert,

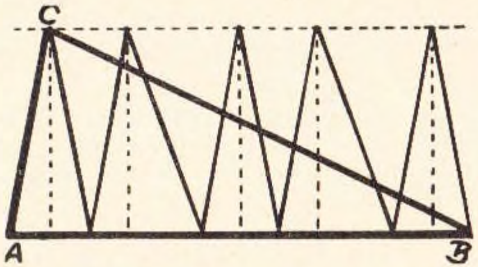
$$\text{also: } \frac{24\text{ cm}^2}{4\text{ cm}} = 6\text{ cm} \qquad a = \frac{2F}{h}$$

Man berechnet die **Höhe eines Dreiecks,**
indem man den **zweifachen Inhalt durch** die **Grundlinie** dividiert,

$$\text{also: } \frac{24\text{ cm}^2}{6\text{ cm}} = 4\text{ cm} \qquad h = \frac{2F}{a}$$

15.4.8.4. Inhaltsgleiche Dreiecke





Die 4 Dreiecke der 1. Skizze haben die **gleiche Grundlinie** (3,4 cm) und die **gleiche Höhe** (2,7 cm). Der **Flächeninhalt** jedes Dreiecks beträgt **4,59 cm²**. Die 4 Dreiecke haben also den **gleichen Flächeninhalt.**

Das große Dreieck der 2. Skizze hat eine Grundlinie von 6 cm und eine Höhe von 2,7 cm. Der **Flächeninhalt** beträgt **8,1 cm².**

Die 5 kleinen Dreiecke haben mit 1 cm, 1,5 cm, 1 cm, 1,5 cm und 1 cm = 6 cm die **gleiche Grundlinie** und mit 2,7 cm die **gleiche Höhe** wie das große Dreieck.

Der **Flächeninhalt** beträgt insgesamt ebenfalls **8,1 cm².**
Das große Dreieck hat also den **gleichen Flächeninhalt** wie die **Summe der 5 kleinen Dreiecke.**

Merken Sie:

Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind inhaltsgleich.

Angewandte Aufgaben

379. Die Grundlinie eines dreieckigen Platzes beträgt 46,30 m, die Höhe 24,60 m. Berechnen Sie den Flächeninhalt!

380. Der Flächeninhalt eines dreieckigen Feldes beträgt 1 350 m², die Grundlinie ist 75 m lang. Berechnen Sie die Höhe!

381. Die Spitze eines dreieckigen Ackers ist von der gegenüberliegenden Grundlinie 75 m entfernt, der Flächeninhalt beträgt 97,5 a. Wie lang ist die Grundlinie?

382. Ein dreieckiger Garten hat eine Grundlinie von 35,75 m und eine Höhe von 26,50 m. Wieviel kostet der Garten, wenn 1 a mit 250 DM berechnet wird?

383. Ein Baugrundstück hat die Form eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten 56,50 m und 34,75 m lang sind. Wieviel kostet das Grundstück, wenn 1 m² mit 53,50 DM berechnet wird?

384. Ein dreieckiges Grundstück mit einer Grundlinie von 124,80 m und einer Höhe von 164,75 m wird gegen ein rechteckiges Grundstück mit einer Länge von 136,50 m ausgetauscht. Berechnen Sie die Breite!

385. Ein Kirchturmdach mit 4 dreieckigen Seitenflächen soll mit Dachschiefer belegt werden. Die Grundlinie der Seitenflächen ist 4,80 m, die Höhe 12,50 m. 1 m² Schieferbelag kostet 34,50 DM. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?

386. Eine Baugesellschaft baut 10 Häuser. Jedes Haus hat 4 gleiche dreieckige Dachflächen mit 6,80 m Grundlinie und 4,75 m Höhe. Wieviel Dachziegel werden insgesamt benötigt, wenn 12 Stück auf 1 m² gerechnet werden?

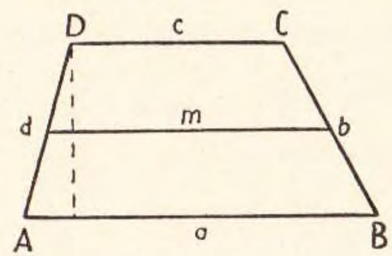
387. Ein rechteckiger Acker von 120 m Länge und 36 m Breite wird gegen einen gleich großen dreieckigen Acker, dessen Grundseite 135 m beträgt, eingetauscht. Berechnen Sie die Höhe des Dreiecks!

388. Die Vorderfront und ein Seitengiebel eines Hauses sollen gestrichen werden. Länge des Hauses 28,40 m, Breite 12,50 m, Höhe bis zur Dachkante 15,20 m, Höhe bis zur Dachspitze 21,75 m. An der Vorderfront werden für Fenster und Türen 24 m², am Seitengiebel 15 m² abgerechnet. Wieviel kostet der Anstrich, wenn 1 m² mit 8,40 DM berechnet wird?

15.4.9. Das Trapez und das Trapezoid

Ein **Trapez** ist ein **ungleichseitiges Viereck** mit **zwei parallelen Seiten.**

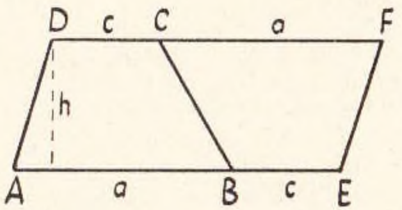
15.4.9.1. Die Berechnung des Umfangs



$$U = a + b + c + d$$

Umfang = Summe der Seiten $\quad U = a + b + c + d$

15.4.9.2. Die Berechnung des Flächeninhalts



$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h \text{ oder } m \cdot h$$

Die Linie AB ist die **große Grundlinie: a**

Die Linie DC ist die **kleine Grundlinie: c**

Der senkrechte Abstand der parallelen Seiten ist die **Höhe: h**

Wir legen zwei inhaltsgleiche Trapeze umgekehrt nebeneinander; es entsteht ein **schiefwinkliges Parallelogramm** (AEFD), dessen Grundlinie aus der **großen und kleinen Grundlinie** des Trapezes (ABCD) besteht: **a + c**

Den **Flächeninhalt des Parallelogramms** (AEFD) berechnet man als **Rhomboid,** also: **(a + c) · h**

Da dieses aus zwei inhaltsgleichen Trapezen besteht, braucht man seinen **Flächeninhalt** nur zu halbieren, um den **des Trapezes** zu erhalten.

$$\frac{\textbf{Große Grundlinie + kleine Grundlinie}}{2} \cdot \textbf{Höhe} \qquad F = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

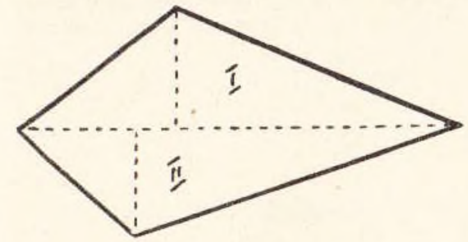
Wenn man die **große Grundlinie (a)** und die **kleine Grundlinie (c)** addiert und durch 2 dividiert: $\frac{(a + c)}{2}$, erhält man die **Mittellinie: m**

Man kann also in der Formel für $\frac{(a + c)}{2}$ auch **m** einsetzen.

Die **Kurzformel** für die Berechnung des Flächeninhalts heißt also:

Flächeninhalt = Mittellinie · Höhe $\qquad F = m \cdot h$

15.4.9.3. Die Berechnung des Trapezoids



Ein **Viereck ohne parallele Seiten** nennt man **Trapezoid.**

Man berechnet den **Flächeninhalt des Trapezoids,** indem man es durch eine Diagonale **in Dreiecke** zerlegt und diese berechnet.

Angewandte Aufgaben

389. Die große Grundlinie eines Trapezes beträgt 36,50 m, die kleine 25,40 m, die Höhe 17,35 m. Wie groß ist der Flächeninhalt?

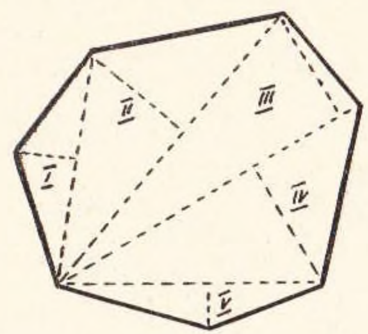
390. Der Flächeninhalt eines Trapezes beträgt 936 m². Die große Grundlinie ist 88,50 m, die kleine 36,30 m lang. Wie groß ist die Höhe?

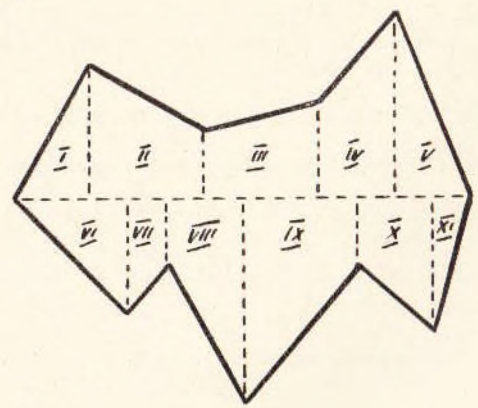
391. Die beiden parallelen Seiten eines trapezförmigen Baugeländes sind 29,50 m und 25 m lang, der senkrechte Abstand beträgt 18,20 m. Wieviel kostet das Baugelände, wenn 1 m² mit 56,25 DM berechnet wird?

392. Eine trapezförmige Dachfläche soll mit Ziegeln belegt werden. Die beiden Grundlinien sind 13,80 m und 11,40 m lang, und die Höhe beträgt 7,50 m. Die Dachziegel sind 24 cm und 15 cm breit. Wieviel Ziegel sind erforderlich, wenn für Überdeckung ein Fünftel der erforderlichen Ziegel gerechnet wird?

15.4.10. Das Vieleck

15.4.10.1. Das unregelmäßige Vieleck

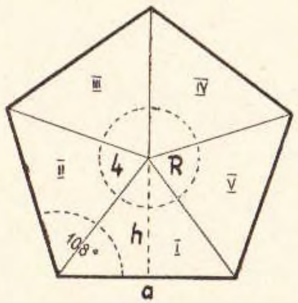




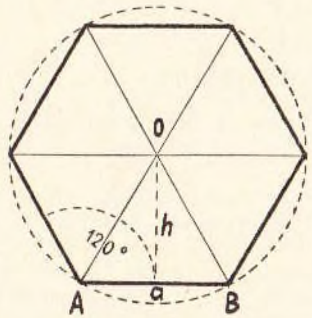
Die Berechnung des Flächeninhalts

Man berechnet das unregelmäßige Vieleck, indem man es in **berechenbare Flächen** (Dreiecke — Rechtecke — Trapeze) aufteilt, die einzelnen Teilflächen berechnet und die Ergebnisse addiert.

15.4.10.2. Das regelmäßige Vieleck



$$F = \frac{a \cdot h}{2} \cdot n$$



$$F = \frac{U \cdot h}{2}$$

Die Berechnung des Flächeninhalts

Verbindet man im regelmäßigen Vieleck den Mittelpunkt mit den Ecken, so entstehen soviel **Dreiecke**, als das Vieleck **Seiten** hat.

Da diese Dreiecke alle gleich groß sind, braucht man nur **ein Dreieck**, das sog. **Bestimmungsdreieck**, zu berechnen und den **Inhalt dieses Dreiecks** mit der **Seitenzahl** zu vervielfachen.

Die **Grundlinie** des Bestimmungsdreiecks nennt man **a.**

Die **Höhe** des Bestimmungsdreiecks nennt man **h.**

Die **Anzahl der Seiten** des Vielecks nennt man **n.**

Man berechnet also den Flächeninhalt des regelmäßigen Vielecks:

Bestimmungsdreieck · Seitenzahl $\qquad \frac{a \cdot h}{2} \cdot n$

Da **Seitenlänge mal Seitenzahl (a · n) gleich Umfang** des Vielecks (U) ist, heißt die Kurzformel:

Flächeninhalt = $\frac{\textbf{Umfang} \cdot \textbf{Höhe}}{2}$ $\qquad F = \frac{U \cdot h}{2}$

Die Höhe des Bestimmungsdreiecks (Seitenstrahl)

Im regelmäßigen Vieleck steht die **Höhe des Bestimmungsdreiecks** in einem bestimmten Verhältnis zur **Seite.** Nimmt man die **Seite des Vielecks** mit 1 an, dann beträgt die **Höhe des Bestimmungsdreiecks:**

beim regelmäßigen **Fünfeck**	**0,688**
beim regelmäßigen **Sechseck**	**0,866**
beim regelmäßigen **Achteck**	**1,207**
beim regelmäßigen **Zehneck**	**1,538**
beim regelmäßigen **Zwölfeck**	**1,866**

Bei der Inhaltsberechnung eines regelmäßigen Vielecks braucht also nur die **Seite des Bestimmungsdreiecks gegeben** zu sein; die **Höhe des Bestimmungsdreiecks,** der **Seitenstrahl,** kann dann **berechnet** werden.

Beispiel:

Wir suchen die unbekannte Höhe eines regelmäßigen Fünfecks, dessen Seitenlänge 3,25 m beträgt.

Bei einer **Seitenlänge** von **1 m** ist die **Höhe 0,688 m**
Bei einer **Seitenlänge** von **3,25 m** ist die **Höhe** 3,25 · 0,688 = **2,236 m**

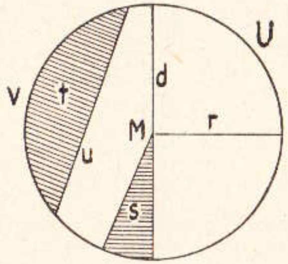
Angewandte Aufgaben

393. Berechnen Sie den Inhalt eines regelmäßigen Fünfecks (Sechsecks, Achtecks), dessen Seitenlänge 6,5 m beträgt!

394. Die Seitenlänge eines Blumenbeetes, das die Gestalt eines regelmäßigen Achtecks hat, beträgt 5 m. Berechnen Sie den Flächeninhalt!

395. Ein Schloßhof, der die Form eines regelmäßigen Sechsecks hat, soll mit Steinplatten belegt werden. Die Seitenlänge des Hofes beträgt 3,50 m. 1 m^2 verlegter Platten wird mit 9,75 DM berechnet. a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Hofes? b) Was kostet das Belegen des Hofes mit Steinplatten?

15.5. Der Kreis



U = Kreisumfang (Peripherie)
F = Kreisinhalt
M = Kreismittelpunkt
d = Durchmesser
r = Halbmesser (Radius)
u = Sehne
v = Kreisbogen
s = Kreisausschnitt (Sektor)
t = Kreisabschnitt (Segment)

Der **Kreisumfang** (die **Kreislinie** oder **Peripherie**) ist eine geschlossene, gleichmäßig gekrümmte Linie, deren sämtliche Punkte gleich weit von einem Punkt, dem **Kreismittelpunkt,** entfernt sind.

Der **Kreisinhalt** (die **Kreisfläche**) ist die Fläche, die von der Kreislinie (vom Kreisumfang) eingeschlossen wird.

Der **Durchmesser** ist eine gerade Linie, die von einem Punkt der Kreislinie durch den Kreismittelpunkt zum gegenüberliegenden Punkt der Kreislinie führt.
Das **Zeichen für Durchmesser** ist ⌀.

Der **Halbmesser (Radius)** ist die kürzeste Entfernung von einem Punkt der Kreislinie zum Kreismittelpunkt.

Die **Sehne** ist eine gerade Linie, die von einem Punkt der Kreislinie zu einem anderen Punkt der Kreislinie führt, ohne den Kreismittelpunkt zu berühren.

Der **Kreisbogen** ist ein Teil der Kreislinie.

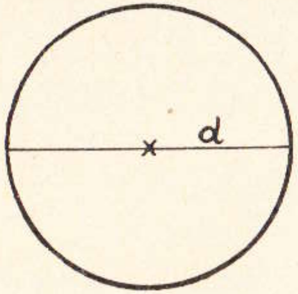
Der **Kreisausschnitt (Sektor)** ist der Teil einer Kreisfläche, der von zwei Halbmessern und einem Bogen begrenzt wird.

Der **Kreisabschnitt (Segment)** ist der Teil einer Kreisfläche, der von Sehne und Bogen begrenzt wird.

Ein **Kreis** wird in **360 Grad (360°)** eingeteilt.

1 Grad (1°) = **60 Minuten** (60′)   **1 Minute** = **60 Sekunden** (60″)

15.5.1. Die Berechnung des Kreisumfangs



$$U = d \cdot \pi \quad \text{oder} \quad U = 2r \cdot \pi$$

$$d = \frac{U}{\pi} \qquad r = \frac{U}{2\pi}$$

Wir messen mit einer Schnur den **Umfang** und den **Durchmesser** eines Wagenrades und teilen den Umfang durch den Durchmesser.

Wir wiederholen diese Übung an mehreren größeren und kleineren Kreisen.

Das Ergebnis ist bei genauer Messung und Berechnung immer das gleiche:
Kreisumfang : Durchmesser = 3,14159 gekürzt: **3,14** oder $3\frac{1}{7}$

In der Formel drückt man 3,14 oder $3\frac{1}{7}$ durch den griech. Buchstaben pi aus.
Das **Zeichen für pi** ist: π.

Wenn nun **Kreisumfang : Durchmesser = 3,14** oder π ist,

dann ist **Durchmesser · 3,14 oder** π = **Kreisumfang**; also:

Kreisumfang = Durchmesser · 3,14 $$U = d \cdot \pi$$

Da der Durchmesser doppelt so groß ist wie der Halbmesser,
heißt die Formel auch: $$U = 2r \cdot \pi$$

Umkehrungen:

$\frac{\textbf{Umfang}}{\pi}$ = **Durchmesser** $$\frac{U}{\pi} = d$$

$\frac{\textbf{Umfang}}{2\pi}$ = **Halbmesser** $$\frac{U}{2\pi} = r$$

Angewandte Aufgaben

396. Der Durchmesser eines Kreises ist 2,70 m. Berechnen Sie den Umfang!

397. Wie groß ist der Umfang eines Kreises, dessen Radius 35 cm beträgt?

398. Der Umfang eines kreisförmigen Wasserbeckens ist 37,68 m. Berechnen Sie den Durchmesser!

399. Wie lang ist der Radius eines Blumenbeetes von 17,16 m Umfang?

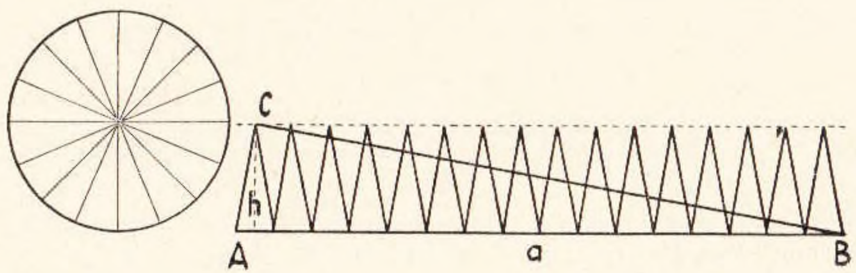
400. Berechnen Sie die Dicke eines Baumes von 2,041 m Umfang!

401. Die runde Kochstelle eines Küchenherdes, deren 3 Ringe je 2,1 cm breit sind, hat einen Durchmesser von 26 cm. Berechnen Sie den Umfang der 3 Ringe und des kreisförmigen Mittelstückes!

402. Wieviel m Bandeisen benötigt ein Schmied zum Beschlagen der 4 Räder eines Wagens, wenn die Vorderräder 68 cm und die Hinterräder 96 cm hoch sind?

403. Um einen runden Teich, der einen Durchmesser von 36,50 m hat, soll ein Geländer angebracht werden. Wieviel kostet das Geländer, wenn das laufende Meter mit 25,50 DM berechnet wird?

15.5.2. Die Berechnung des Kreisinhalts



Wir sägen eine hölzerne **Kreisfläche** in **16 gleiche Kreisausschnitte** (Bild 1).
Um die Kreisfläche legen wir ein elastisches Stahlband, an dem wir die 16 Kreisausschnitte befestigen, und ziehen die Kreisfläche auseinander (Bild 2).

Die 16 Kreisausschnitte bilden nun **16 gleiche Dreiecke** mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe.

Diese **16 Dreiecke**, die zusammengefaßt den **Flächeninhalt des Kreises** bilden, sind ebenfalls inhaltsgleich dem großen **Dreieck ABC**, da Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe inhaltsgleich sind.

Wenn also die **Kreisfläche** und die **16 Dreiecke** inhaltsgleich
und die **16 Dreiecke** dem **Dreieck ABC** inhaltsgleich sind,
dann ist auch das **Dreieck ABC gleich dem Flächeninhalt des Kreises.**

Man berechnet also den **Flächeninhalt des Kreises:**

$$F = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{U \cdot r}{2} = \frac{d \cdot \pi \cdot r}{2} = \frac{2r \cdot \pi \cdot r}{2} = r \cdot r \cdot \pi = \underline{\underline{r^2 \cdot \pi}}$$

Erklärung:

Nach vorstehender Darlegung wird der **Flächeninhalt des Kreises** so berechnet wie der **Flächeninhalt des Dreiecks ABC**, also: $\frac{a \cdot h}{2}$

Da die **Grundlinie des Dreiecks ABC** (= a) gleich dem **Umfang des Kreises** (= U) und die **Höhe des Dreiecks** (= h) gleich dem **Radius** (= r) ist,

kann man für die Grundlinie (a) den **Umfang (U)** und für die Höhe (h) den **Radius (r)** einsetzen, also: $\frac{U \cdot r}{2}$

Da der **Umfang des Kreises** mit **d** · π berechnet wird, kann man für Umfang (U) **d** · π einsetzen, also: $\frac{d \cdot \pi \cdot r}{2}$

Für **Durchmesser** (d) kann man 2 **Radius (2r)** einsetzen, also: $\frac{2r \cdot \pi \cdot r}{2}$

Wir **kürzen** die 2 und **stellen um,** also: **r** · **r** · π oder $\underline{\underline{r^2 \cdot \pi}}$

Kreisinhalt = Radius · Radius · 3,14 $F = r^2 \cdot \pi$

Angewandte Aufgaben

404. Der Halbmesser eines Kreises ist 1,35 m. Berechnen Sie den Flächeninhalt!

405. Der Umfang eines Baumstammes mißt 1,8212 m. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts!

406. Der Umfang einer kreisrunden Rasenfläche ist 72,22 m. Wie groß ist die Rasenfläche?

407. Der Durchmesser eines Kreises und die Länge eines inhaltsgleichen Rechtecks betragen beide 26 cm. Berechnen Sie die Breite des Rechtecks!

408. Der Halbmesser eines Kreises ist 12 cm, die Grundlinie eines inhaltsgleichen Dreiecks 36 cm lang. Berechnen Sie die Höhe des Dreiecks!

409. Der Umfang einer kreisrunden Waschmaschine, deren Dauben (Seitenwandbretter) 2,2 cm dick sind, mißt 188,4 cm. Berechnen Sie die Bodenfläche!

410. Sechs Rundfenster mit einem Durchmesser von 1,25 m werden verglast. Wieviel m² Glas sind erforderlich, wenn für Verschnitt 15% gerechnet werden?

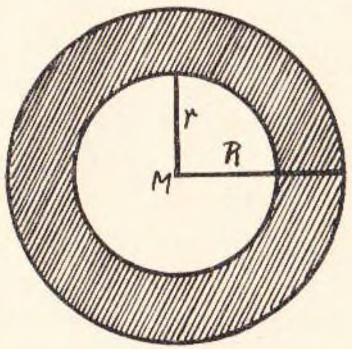
411. In einer kreisrunden Grünfläche von 78,50 m Umfang werden jeweils 4 kreisförmige Blumenbeete mit einem Durchmesser von 2,60 m angelegt. Wieviel m² Rasen bleiben übrig?

412. Der Grundriß einer Kirche besteht aus einem Rechteck von 32,60 m Länge und 24,80 m Breite. Der angefügte Chor ist ein Halbkreis mit einem Durchmesser von 16,40 m. Wie groß ist die gesamte Bodenfläche?

413. Für einen runden Tisch, der einen Durchmesser von 1,16 m hat, soll eine Decke gefertigt werden, die überall 25 cm überhängt. a) Wieviel m² Stoff hat die Tischdecke? b) Die Decke bekommt am äußeren Rand noch eine Borte, die je Meter 2,60 DM kostet. Wieviel kostet die Borte?

15.5.3. Die Berechnung des Kreisrings

Der **Kreisring** ist eine Fläche, die von zwei **konzentrischen Kreisen** (das sind Kreise mit **gemeinsamem Mittelpunkt**) mit **verschiedenen Halbmessern** begrenzt wird.



Den **großen Radius** bezeichnen wir mit **R**.

Den **kleinen Radius** bezeichnen wir mit **r**.

Die **große Kreisfläche** berechnen wir: $R^2 \cdot \pi$.

Die **kleine Kreisfläche** berechnen wir: $r^2 \cdot \pi$.

Wenn man die kleine Kreisfläche von der großen Kreisfläche subtrahiert, erhält man den Flächeninhalt der Kreisrings.

Große Kreisfläche
— **kleine Kreisfläche**
= **Kreisring**

$$F = R^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi$$

oder einfacher

$$F = (R^2 - r^2) \cdot \pi$$

Angewandte Aufgaben

414. Der große Radius eines Kreises ist 12 cm, der kleine ist 8 cm lang. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Kreisringes!

415. Eine kreisförmige Rasenfläche mit 32,50 m Durchmesser ist von einem 2,50 m breiten Weg umgeben, der zu beiden Seiten mit Draht abgegrenzt werden soll. Wieviel laufende Meter Draht werden benötigt?

416. Der Umfang des großen Kreises beträgt 219,8 cm, der Umfang des kleinen Kreises 175,84 cm. Wie groß ist der Kreisring?

417. In der Mitte eines runden Teiches von 471 m Umfang liegt eine runde Insel, die einen Durchmesser (⌀) von 36,40 m hat. Berechnen Sie die Wasserfläche des Teiches!

418. Der äußere Umfang eines runden Turmes ist 26,69 m, der innere Durchmesser 7,24 m. Wieviel m² Grundfläche hat die Mauer?

419. Ein Teich mit einem Durchmesser von 24 m ist von einem 2 m breiten Weg umgeben, der zu beiden Seiten mit Randsteinen eingefaßt und mit Kies bestreut werden soll. a) Wieviel Randsteine von 45 cm Länge werden benötigt? b) Wieviel Karren Kies sind erforderlich, wenn man auf 1 m² 1 Karre rechnet?

15.6. Das Quadratwurzelziehen

Wenn wir aus dem **Flächeninhalt eines Quadrates** die **Seite** oder aus dem **Flächeninhalt eines Kreises** den **Halbmesser (Radius)** berechnen wollen, müssen wir die **Quadratwurzel** ziehen, d.h., wir suchen die Zahl, die, mit sich selbst multipliziert, den Flächeninhalt des Quadrates ergibt.

Beim Quadratwurzelziehen unterscheiden wir die Begriffe **Quadratzahl** und **Quadratwurzel**.

$9 \cdot 9$ oder 9^2 (lies: 9 hoch 2 oder 9 zum Quadrat) $=$ **81**

Multipliziert man eine Zahl (9) mit sich selbst ($9 \cdot 9$), dann ist das Produkt (81) das Quadrat der Zahl: die **Quadratzahl**.

Übersicht der Quadratzahlen von 1—59

Einer → / Zehner ↓	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1 024	1 089	1 156	1 225	1 296	1 369	1 444	1 521
4	1 600	1681	1 764	1 849	1 936	2025	2116	2 209	2 304	2401
5	2 500	2601	2704	2 809	2 916	3025	3 136	3 249	3 364	3 481

Umgekehrt kann man aus einer Quadratzahl die Quadratwurzel ziehen.
Die **Quadratwurzel** aus der Quadratzahl 81 ist **9**; denn $9 \cdot 9$ oder $9^2 = 81$

Merken Sie:

> **Die Quadratwurzel ziehen heißt, eine Zahl suchen, die, mit sich selbst multipliziert, die gegebene Quadratzahl ergibt.**

Das Ziehen der Quadratwurzel stellt man dar durch das **Wurzelzeichen:** $\sqrt{}$

Für: **Die Wurzel aus 81** schreibt man: $\sqrt{81}$

Das **Wurzelzeichen** $\sqrt{}$ stellt ein r dar (Anfangsbuchstabe von radix = Wurzel).

Wir bilden Quadratzahlen:

$2^2 = 4$	$10^2 = 100$	$100^2 = 10\,000$
$9^2 = 81$	$99^2 = 9\,801$	$999^2 = 998\,001$

Wir stellen dabei fest:

Die Quadratzahl von **1stelligen Zahlen** ist **1- oder 2stellig.**
Die Quadratzahl von **2stelligen Zahlen** ist **3- oder 4stellig.**
Die Quadratzahl von **3stelligen Zahlen** ist **5- oder 6stellig.**

Wir ziehen Quadratwurzeln:

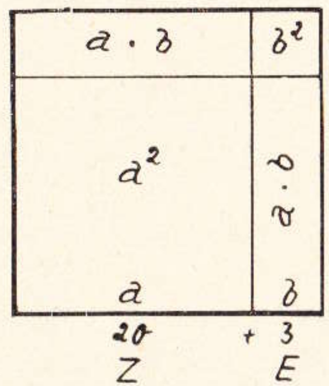
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{50\,625} = 225$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{6\,689} = 83$	$\sqrt{746\,496} = 864$

Wir stellen fest:

Die **Quadratwurzel aus 1- oder 2stelligen Zahlen** ist **1stellig.**
Die **Quadratwurzel aus 3- oder 4stelligen Zahlen** ist **2stellig.**
Die **Quadratwurzel aus 5- oder 6stelligen Zahlen** ist **3stellig.**

15.6.1. Das Quadrat einer zweistelligen Zahl

Das Quadrat von 23



Z = Zehner
E = Einer

Die Bestandteile des Quadrates von 23 sind:

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline \underline{\underline{529}} \end{array} = \begin{array}{r} 20 \cdot 20 \\ \hline 400 \end{array} + \begin{array}{r} 20 \cdot 3 \\ \hline 60 \end{array} + \begin{array}{r} 3 \cdot 20 \\ \hline 60 \end{array} + \begin{array}{r} 3 \cdot 3 \\ \hline 9 \end{array} = \begin{array}{r} 400 \\ +\ 120 \\ +\ 9 \\ \hline = \underline{\underline{529}} \end{array}$$

$$(\mathbf{Z} + \mathbf{E})^2 = \mathbf{Z}^2 + 2 \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E}^2$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\,\mathbf{a}\,\mathbf{b} + \mathbf{b}^2$$

Erklärung:

Das vorstehende Quadrat hat eine Seitenlänge von 23 cm, das sind 2 **Zehner (Z)** und 3 **Einer (E)**.

Die **Zehner** bezeichnen wir mit **a**, die **Einer** mit **b**.

Die Bestandteile des Quadrates sind:

das **Zehnerquadrat, 2 Rechtecke** und das **Einerquadrat.**

Das **Zehnerquadrat**
($20 \cdot 20 = 400$) bezeichnen wir mit Z^2 oder $\mathbf{a^2}$.

Die **2 Rechtecke**
sind das 2fache Produkt der Zehner und Einer
($20 \cdot 3 + 3 \cdot 20 = 120$),
wir bezeichnen sie mit $2 \cdot Z \cdot E$ oder $2 \cdot a \cdot b$, kurz: **2 ab.**

Das **Einerquadrat**
($3 \cdot 3 = 9$) bezeichnen wir mit E^2 oder $\mathbf{b^2}$.

Das Quadrat $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$ besteht also aus: $\mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$.

15.6.2. Das Quadratwurzelziehen aus 3- oder 4stelligen Zahlen

Zieht man aus einer 3- oder 4stelligen Zahl die Quadratwurzel, dann müssen sich die im Quadrat enthaltenen 3 Bestandteile:

das **Zehnerquadrat** ($\mathbf{a^2}$), die **2 Rechtecke (2ab)** und das **Einerquadrat** ($\mathbf{b^2}$) abziehen lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rll} & & \text{ab} \\ & \sqrt{5|29} & = 23 \\ a^2 = & 4 & 2a \\ \hline & 129 & : 40 \\ 2ab = & 120 & \\ \hline & 9 & \\ b^2 = & 9 & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

Probe:

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \\ \hline\hline \end{array}$$

Die Quadratwurzel aus 529 wird wie folgt errechnet:

a) **Wir setzen** vor die Zahl 529 **das Wurzelzeichen:** $\sqrt{529}$.

b) **Wir teilen** die Zahl 529 von rechts nach links **in 2stellige Gruppen ein:** $\sqrt{5|29}$
Die **Anzahl der Gruppen** gibt die **Stellenzahl des Ergebnisses** an.

c) **Wir rechnen:**

Die Wurzel aus 5 ist 2; denn $2 \cdot 2 = 4$.
Wir müßten eigentlich sagen: Die Wurzel aus 529 ist 20; denn $20 \cdot 20 = 400$.
Die 2 Nullen werden nicht niedergeschrieben.

Die 2 (2 Z oder 20 E) setzen wir als **a** in das Ergebnis ein und **ziehen** die 4 (400) als $\mathbf{a^2}$ von 5 (529) **ab;** es bleibt ein Rest von 1 (100).

Wir holen die 29 herunter; der Rest ist nun 129.

Diesen Rest 129 **teilen** wir **durch 2a** ($a = 20$, $2a = 40$), dann erhalten wir nächste Stelle des Ergebnisses = **b** (3).

Nun **vervielfachen** wir **b mit 2 a** ($3 \cdot 40$), dann erhalten wir 2 ab (120).

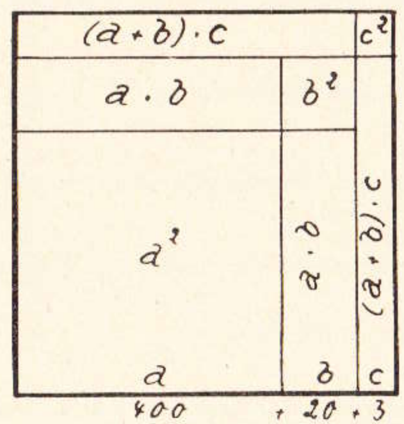
Wir **ziehen 2ab** (120) von 129 **ab;** es bleibt ein Rest von 9.

Von diesem Rest 9 **ziehen** wir $\mathbf{b^2}$ ($3 \cdot 3 = 9$) **ab;** es bleibt 0 übrig.

Die **Quadratwurzel aus 529** ist also **23;** denn $23 \cdot 23 = \mathbf{529}$.

Das Quadrat einer dreistelligen Zahl

Das Quadrat von 423



Die Bestandteile des Quadrates von 423 sind:

$$\begin{array}{r}
423\cdot423\\
\hline
1269\\
846\\
1692\\
\hline
\underline{\underline{178929}}
\end{array}
\quad = \quad
\frac{400\cdot400}{160\,000} + \underbrace{\frac{400\cdot20}{8\,000} + \frac{20\cdot400}{8\,000}}_{16\,000} + \frac{20\cdot20}{400} + \underbrace{\frac{420\cdot3}{1\,260} + \frac{3\cdot420}{1\,260}}_{2\,520} + \frac{3\cdot3}{9}
\quad
\begin{array}{r}
= 160\,000\\
+ \ 16\,000\\
+ \quad 400\\
+ \ 2\,520\\
+ \qquad 9\\
\hline
\underline{\underline{178\,929}}
\end{array}$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 \quad + 2ab \quad + b^2 \quad + 2\,(a + b)\cdot c + c^2$$

Erklärung:

Das vorstehende Quadrat hat eine Seitenlänge von 423 cm, das sind **4 Hunderter, 2 Zehner** und **3 Einer.**

Die **Hunderter** bezeichnen wir mit **a**, die **Zehner** mit **b**, die **Einer** mit **c.**

Die Bestandteile des Quadrates sind:

das **Hunderterquadrat, 2 große Rechtecke,** das **Zehnerquadrat, 2 kleine Rechtecke** und das **Einerquadrat.**

Das **Hunderterquadrat**
($400 \cdot 400 = 160\,000$) bezeichnen wir mit $\mathbf{a^2}$.

Die **2 großen Rechtecke**
sind das 2fache Produkt der Hunderter und Zehner
($400 \cdot 20 + 20 \cdot 400 = 16\,000$);
wir bezeichnen sie mit **2ab.**

Das **Zehnerquadrat**
($20 \cdot 20 = 400$) bezeichnen wir mit $\mathbf{b^2}$.

Die **2 kleinen Rechtecke**
sind das 2fache Produkt der Hunderter plus Zehner ($a + b$) und Einer (c)
($420 \cdot 3 + 3 \cdot 420 = 2\,520$);
wir bezeichnen sie mit $\mathbf{2\,(a+b)\cdot c}$.

Das **Einerquadrat**
($3 \cdot 3 = 9$) bezeichnen wir mit $\mathbf{c^2}$.

$(a + b + c)^2$ besteht also aus: $a^2 + 2ab + b^2 + 2\,(a + b)\cdot c + c^2$.

15.6.3. Das Quadratwurzelziehen aus 5- oder 6stelligen Zahlen

Zieht man aus einer 5- oder 6stelligen Zahl die Quadratwurzel, dann müssen sich die im Quadrat enthaltenen 5 Bestandteile:

das **Hunderterquadrat** ($\mathbf{a^2}$),

die **2 großen Rechtecke (2ab),**

das **Zehnerquadrat** ($\mathbf{b^2}$),

die **2 kleinen Rechtecke** ($\mathbf{2\,(a+b)\cdot c}$)

und das **Einerquadrat** ($\mathbf{c^2}$) abziehen lassen.

Beispiel:

$$\begin{array}{rrl}
 & & a\ b\ c\\
 & \sqrt{17|89|29} & = 4\ 2\ 3\\
a^2 = & 16 & \quad 2a\\
\hline
 & 189 & : 80\\
2ab = & 160 & \\
\hline
 & 29 & \\
b^2 = & 4 & \quad 2(a+b)\\
\hline
 & 2529 & : 840\\
2(a+b)\cdot c = & 2520 & \\
\hline
 & 9 & \\
c^2 = & 9 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Probe:
$$\begin{array}{r}
423 \cdot 423\\
\hline
1269\\
846\\
1692\\
\hline
\underline{\underline{178929}}
\end{array}$$

Die Quadratwurzel aus 178 929 wird wie folgt errechnet:

a) Wir setzen vor die Zahl 178 929 **das Wurzelzeichen:** $\sqrt{178\,929}$

b) Wir teilen die Zahl 178 929 von rechts nach links **in 2stellige Gruppen ein:**

$\sqrt{17|89|29}$

Die **Anzahl der Gruppen** gibt die **Stellenzahl des Ergebnisses** an.

c) Wir rechnen:

Die Wurzel aus 17 ist 4; denn $4 \cdot 4 = 16$.

Wir müßten eigentlich sagen:

Die Wurzel aus 178 929 ist 400; denn 400 · 400 = 160 000.
Die Nullen werden hier und in der Folge nicht niedergeschrieben, so daß das Quadratwurzelziehen mit der Kurzform beginnt:
Die Wurzel aus 17 ist 4; denn 4 · 4 = 16.

Die 4 setzen wir als **a** in das Ergebnis ein und **ziehen** 16 als **a²** von 17 **ab;** es bleibt ein Rest von 1.

Wir holen die 89 herunter;
der Rest ist nun 189.

Diesen Rest 189 **teilen** wir **durch 2a** (80);
wir erhalten so die nächste Stelle des Ergebnisses **b** (2).

Nun **vervielfachen** wir **b mit 2a** (2 · 80);
wir erhalten **2ab** (160).

Wir **ziehen 2ab** (160) von 189 **ab;**
es bleibt ein Rest von 29.

Von diesem Rest 29 **ziehen** wir **b²** (4) **ab;**
es bleibt ein Rest von 25.

Wir holen die 29 herunter;
der Rest ist nun 2 529.

Diesen Rest 2 529 **teilen** wir **durch 2 (a + b)** = 840;
wir erhalten so die nächste Stelle des Ergebnisses = **c** (3).

Nun **vervielfachen** wir **c mit 2 (a + b)** = 3 · 840;
wir erhalten **2 (a + b) · c** (2 520).

Wir **ziehen 2 (a + b) · c** = 2 520 von 2 529 **ab;**
es bleibt ein Rest von 9.

Von diesem Rest 9 **ziehen** wir **c²** (9) **ab;**
es bleibt 0 übrig.

Die **Quadratwurzel aus 178 929** ist also **423**; denn 423 · 423 = **178 929.**

15.6.4. Praktische Übungen

Der Rechenvorgang beim Quadratwurzelziehen wurde vorstehend erläutert.
Das praktische Rechnen geschieht nun nach folgendem Verfahren:

15.6.4.1. Wir ziehen die Wurzel aus drei- und vierstelligen Zahlen

√53|29 = 73
49
429 : 140
420
9
9
0

Rechnen Sie!

Die Wurzel aus 53 ist 7; denn 7 · 7 = 49; Rest 4.

429 : 140 (140 = 2 · 7 mit angehängter 0) = 3.

429 — 420 (420 = 3 · 140) = 9.

9 — 9 (9 = 3 · 3) = 0.

Probe: 73 · 73 = 5 329

Übungsaufgabe 420

Ziehen Sie die Wurzel aus folgenden Zahlen!

484	676	729	841	1 024
1 444	3 136	6 889	8 836	9 409

15.6.4.2. Wir ziehen die Wurzel aus vielstelligen Zahlen

√7|52|95|36 = 2 744
4
352 : 40
280
72
49
2395 : 540
2160
235
16
21936 : 5480
21920
16
16
0

Rechnen Sie!

Die Wurzel aus 7 ist 2; denn 2 · 2 = 4; Rest 3

352 : 40 (40 = 2 · 2 mit angehängter 0) = 7

352 — 280 (280 = 7 · 40) = 72

72 — 49 (49 = 7 · 7) = 23

2 395 : 540 (540 = 2 · 27 mit angehängter 0) = 4

2 395 — 2 160 (2 160 = 4 · 540) = 235

235 — 16 (16 = 4 · 4) = 219

21 936 : 5 480 (5 480 = 2 · 274 mit angehängter 0) = 4

21 936 — 21 920 (21 920 = 4 · 5 480) = 16

16 — 16 (16 = 4 · 4) = 0

Probe: 2 744 · 2 744 = 7 529 536

Übungsaufgabe 421

Ziehen Sie die Wurzel aus folgenden Zahlen!

a)	32 041	152 881	207 936	695 556
	956 484	4 032 064	7 529 536	7 907 344
b)	10 278 436	36 216 324	57 274 624	
	65 448 100	780 811 249	150 229 108 836	

15.6.4.3. Wir ziehen die Wurzel aus Dezimalzahlen (Die Rechnungen gehen auf)

```
√41|47,36 = 64,4
 36
 547 : 120          Probe:
 480
  67                64,4 · 64,4
  16                      2576
 5136 : 1280             2576
 5120                   3864
   16                  4 147,36
   16
    0
```

```
√0,42|64|09 = 0,653
 36
 664 : 120          Probe:
 600
  64                0,653 · 0,653
  25                         1959
 3909 : 1300                3265
 3900                      3918
    9                    0,426409
    9
    0
```

Dezimalzahlen teilen wir **vom Komma aus nach rechts und links in zweistellige Gruppen** ein und ziehen die **Wurzel wie bei ganzen Zahlen.**

Übungsaufgabe 422

Ziehen Sie die Wurzel aus folgenden Zahlen!

a) 3 696,64   81,7216   457,96   76,5625   9 733,7956

b) 0,205209   0,837225   0,015129   0,002079360

15.6.4.4. Wir ziehen die Wurzel aus Dezimalzahlen (Die Rechnungen gehen nicht auf)

```
√12 =
√12,00|00|00 = 3,464
 9
 300 : 60           Probe:
 240
  60                3,464 · 3,464
  16                        13856
  4400 : 680               20784
  4080                    13856
   320                   10392
    36                   11,999296
   28400 : 6920      +         704
   27680                 12,000000
     720
      16
     704
```

```
√3,14 =
√3,14|00|00|00 = 1,772
 1
 214 : 20           Probe:
 140
  74                1,772 · 1,772
  49                         3544
  2500 : 340                12404
  2380                     12404
   120                     1772
    49                   3,139984
   7100 : 3540       +         16
   7080                  3,140000
     20
      4
     16
```

Der Rechenvorgang ist der gleiche wie bei Aufgaben, die aufgehen.
Bei der **Probe** addieren wir den **Rest zum Produkt;** wir erhalten so die **Quadratzahl.**

Übungsaufgabe 423

Ziehen Sie die Wurzel aus folgenden Zahlen!

(Rechnen Sie auf 3 und kürzen Sie auf 2 Stellen!)

a) 5   8   23   39   89   136   3 456   4 538   6 475

b) 8,2536   726,18   0,0024   4,006   0,2080

15.6.4.5. Wir ziehen die Wurzel aus gewöhnlichen Brüchen

```
2½ = 2,5   √2,50|00|00 = 1,581
            1
            150 : 20            Probe:
            100                 1,581 · 1,581
             50                          1581
             25                        12648
             2500 : 300               7905
             2400                    1581
              100                  2,499561
               64               +       439
              3600 : 3160          2,500000
              3160
               440
                 1
               439
```

Wir verwandeln **die gewöhnlichen Brüche in Dezimalbrüche** und ziehen dann die Quadratwurzel.

Übungsaufgabe 424

Ziehen Sie die Wurzel aus folgenden Brüchen!

(Rechnen Sie auf 3 und kürzen Sie auf 2 Stellen!)

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $3\frac{1}{2}$ $3\frac{3}{4}$ $4\frac{2}{5}$ $3\frac{1}{3}$ $5\frac{5}{8}$ $23\frac{5}{10}$

Angewandte Aufgaben

425. Ein quadratförmiger Garten ist 841 m² groß. Berechnen Sie die Seitenlänge!

426. Eine quadratförmige Wiese, die 11,56 a groß ist, soll mit einem Zaun umgeben werden. Wieviel m Zaun müssen gesetzt werden?

427. Ein rechteckiger Garten von 36 m Länge und 20,25 m Breite wird gegen einen gleichgroßen quadratischen Garten ausgetauscht. Wie lang ist dessen Seite?

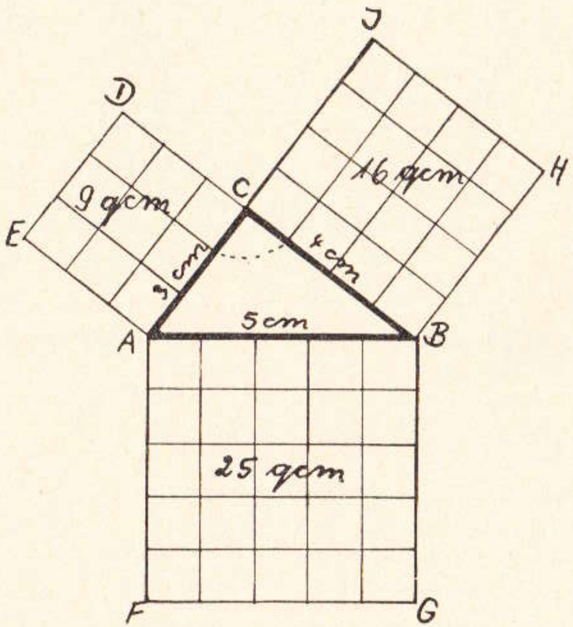
428. Der Umfang eines kreisförmigen Gartenbeetes beträgt 10,99 m. Wie lang ist die Seite eines inhaltsgleichen quadratischen Beetes?

429. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 113,04 cm². Wie groß ist der Radius? ($\pi = 3{,}14$)

430. Der Flächeninhalt eines Kreises beträgt 616 cm². Wie groß ist der Durchmesser? ($\pi = 3\frac{1}{7}$)

431. Die Wasserfläche eines runden Teiches beträgt 1 017,36 m². Wie groß ist der Umfang? ($\pi = 3{,}14$)

15.7. Der pythagoreische Lehrsatz



Erklärung:

Im rechtwinkligen Dreieck ABC sind die beiden den rechten Winkel einschließenden **Lotseiten** oder **Katheten** 3 cm und 4 cm lang.

Die dem rechten Winkel gegenüberliegende **Spannseite** oder **Hypotenuse** ist 5 cm lang.

Die über den drei Seiten errichteten Quadrate nennt man **Kathetenquadrate** und **Hypotenusenquadrat.**

Das kleine Kathetenquadrat ist 3 cm · 3 cm = **9 cm²** groß.
Das große Kathetenquadrat ist 4 cm · 4 cm = **16 cm²** groß.
Das Hypotenusenquadrat ist 5 cm · 5 cm = **25 cm²** groß.

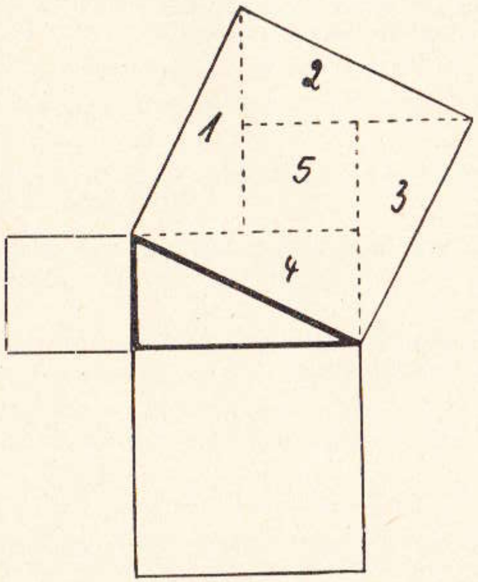
Die **Summe der beiden Kathetenquadrate** (9 cm² + 16 cm²) ist gleich dem **Hypotenusenquadrat** (25 cm²).

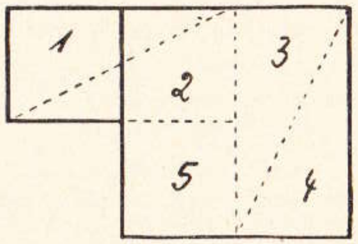
Dieser **Lehrsatz:**

Im rechtwinkligen Dreieck ist der Inhalt der beiden Kathetenquadrate gleich dem Inhalt des Hypotenusenquadrates

wird dem griechischen Philosophen **Pythagoras,** der um 500 v. Chr. lebte, zugeschrieben.

Zur Veranschaulichung:





Erklärung:

In der ersten Zeichnung ist über den Seiten des Dreiecks ein **großes Kathetenquadrat,** ein **kleines Kathetenquadrat** und das **Hypotenusenquadrat** errichtet.

In der zweiten Zeichnung ist das kleine **Kathetenquadrat nach unten** geklappt.

Wir zerlegen das **Hypotenusenquadrat** in **4 Dreiecke** und **1 Quadrat** und legen diese 5 Teile in anderer Anordnung auf die beiden nebeneinandergelegten Kathetenquadrate: **die Flächen decken sich.**

Das **Hypotenusenquadrat** ist also **gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate.**

Angewandte Aufgaben

432. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 35 cm und 12 cm. Berechnen Sie die Hypotenuse!

433. In einem rechtwinkligen Dreieck beträgt die Hypotenuse 17 cm und eine Kathete 8 cm. Berechnen Sie die andere Kathete!

434. Die Grundlinie eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ist 8,4 cm, die Höhe 4,3 cm. Berechnen Sie die Länge der beiden Schenkel!

435. Die Seitenlänge eines Quadrates beträgt 8,2 cm. Berechnen Sie die Diagonale!

436. Ein Rechteck ist 10,6 cm lang und 8,4 cm breit. Berechnen Sie die Diagonale!

437. Der Umfang eines quadratischen Zimmers ist 36,40 m. Wie lang ist die Diagonale?

438. Die Diagonale eines quadratischen Posthofes ist 64 m lang. a) Wie lang ist eine Seite? b) Wie groß ist der Flächeninhalt?

439. Ein rechteckiger Garten ist 28 m lang. Der Flächeninhalt beträgt 420 m^2. Wie lang ist die Diagonale?

440. Eine Leiter ist schräg an eine Wand gelehnt. Der Abstand vom Fußende der Leiter bis zur Wand beträgt 1,80 m, der Abstand von der Erde bis zur Leiterspitze beträgt 7,20 m. Berechnen Sie die Länge der Leiter!

441. Die Vorderseite eines Dienstgebäudes hat eine Länge von 18,75 m; die Höhe bis zur Dachrinne beträgt 14,50 m. Die Giebelseite hat eine Länge von 12 m; die Höhe bis zum Dachfirst beträgt 17,70 m. Wieviel m^2 Flächeninhalt hat a) die Vorderseite, b) die Giebelseite, c) eine Dachfläche?

16. Körperberechnung

Von Flächen begrenzte Teile des Raumes nennt man Körper.

Die Körper haben drei Ausdehnungen:

eine **Länge,** eine **Breite** und eine **Höhe.**

Es gibt folgende **Arten der Körper:**

Würfel, Prisma, Pyramide, Walze, Kegel und **Kugel.**

Die Körper werden von **Flächen** umgeben.

Man unterscheidet **Grund-, Kopf-** und **Seitenflächen.**

Die Gesamtheit der Flächen eines Körpers nennt man **Oberfläche.**

Die Summe der Seitenflächen nennt man **Mantel.**

Flächen, die aneinanderstoßen, bilden eine **Kante.**

Punkte, in denen mehrere Kanten zusammenstoßen, nennt man **Ecken.**

Die Raumgröße der Körper nennt man **Kubikinhalt** oder **Volumen.**

16.1. Der Würfel

Der **Würfel,** auch **Kubus** genannt, ist ein Körper mit **6 gleichen quadratischen Flächen, 8 Ecken** und **12 Kanten.**

Beim Würfel und bei allen übrigen Körpern berechnet man:

a) den **Mantel (M)** und die **Oberfläche (O),**

b) den **Raum-** oder **Kubikinhalt,** den wir mit **Volumen (V)** bezeichnen.

Das **Einheitsmaß** für die Berechnung des Volumens ist das **Kubikmeter.**

Ein **Kubikmeter** (**cbm** = **m^3**) ist ein Würfel mit **1 m** **Kantenlänge.**

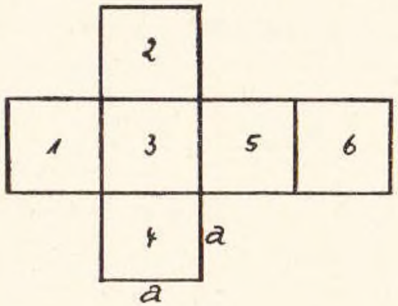
Ein **Kubikdezimeter** (**cdm** = **dm^3**) ist ein Würfel mit **1 dcm** **Kantenlänge.**

Ein **Kubikzentimeter** (**ccm** = **cm^3**) ist ein Würfel mit **1 cm** **Kantenlänge.**

Ein **Kubikmillimeter** (**cmm** = **mm^3**) ist ein Würfel mit **1 mm** **Kantenlänge.**

Die **Kantenlänge** des Würfels bezeichnet man mit **a.**

16.1.1. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche



Mantel = Seitenfläche · 4

$M = 4 \cdot (a \cdot a)$ oder $4a^2$

$O = 6 \cdot (a \cdot a)$ oder $6a^2$

Oberfläche = Grundfläche · 6

Da der **Mantel** des Würfels aus **4** und die **Oberfläche** aus **6** gleich großen quadratischen Flächen besteht, berechnet man **eine Fläche** und **vervielfacht** das Ergebnis **mit 4** bzw. **mit 6.**

Mantel	= **Seite · Seite · 4**	$M = 4 \cdot (a \cdot a)$ oder $4a^2$
Oberfläche	= **Seite · Seite · 6**	$O = 6 \cdot (a \cdot a)$ oder $6a^2$

Angewandte Aufgaben

442. Die Kantenlänge eines Würfels ist 6,8 cm. Berechnen Sie a) den Mantel, b) die Oberfläche!

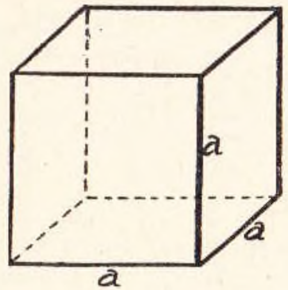
443. Die Oberfläche eines Würfels beträgt 9 126 cm². Wie lang ist die Kante?

444. Wieviel m² Weißblech benötigt man zu einem würfelförmigen Kasten (ohne Deckel) von 92 cm Kantenlänge?

445. Ein würfelförmiger Marmorblock von 85 cm Kantenlänge soll an 5 Seiten geschliffen und poliert werden. Wieviel ist dafür zu zahlen, wenn 26,25 DM für 1 m² berechnet werden?

446. Ein würfelförmiger Kasten (mit Deckel), dessen Kantenlänge im Lichten 1,50 m beträgt, soll mit Blech ausgeschlagen werden. Wie hoch belaufen sich die Kosten, wenn das m² mit 19,60 DM berechnet wird?

16.1.2. Die Berechnung des Rauminhalts



Volumen = Länge · Breite · Höhe

$V = a \cdot a \cdot a$ oder a^3

oder $G \cdot h$

G = Grundfläche h = Höhe

Erklärung:

Wenn die **Kantenlänge** eines Würfels **10 cm** beträgt, dann berechnet man die **Grundfläche (G)** : 10 cm · 10 cm = **100 cm².**

Auf die Grundfläche kann man 100 cm³ setzen.

Die so entstandene Schicht ist 1 cm hoch.

Bei einer Höhe von 10 cm kann man 10 solcher Schichten aufeinandersetzen, also: 100 cm² · 10 = 1 000 cm³

Man berechnet also den **Rauminhalt** (das **Volumen**) des Würfels:

Kante · Kante · Kante	$V = a \cdot a \cdot a$ oder a^3
oder Grundfläche · Höhe	$V = G \cdot h$

Angewandte Aufgaben

447. Wie groß ist der Inhalt eines Würfels, dessen Kantenlänge 24 cm (12,5 cm; 0,09 cm) beträgt?

448. Berechnen Sie das Volumen eines Würfels von 2,45 m Kantenlänge!

449. Die Kante eines würfelförmigen Kastens ist 2,65 m lang. Wie groß ist a) die Oberfläche, b) der Rauminhalt?

450. Wieviel Würfel von 4 cm Kantenlänge lassen sich aus einem kubischen (würfelförmigen) Holzblock von 32 cm Kantenlänge schneiden?

451. Ein würfelförmiges Zimmer hat eine Seitenlänge von 4,35 m. Wieviel m³ Luft enthält das Zimmer?

452. Zu beiden Seiten einer Straße sollen je 24 Bäume angepflanzt werden. Die würfelförmigen Pflanzlöcher sind 75 cm tief. Wieviel m³ Erde müssen ausgehoben werden?

453. Die Oberfläche eines Würfels ist 4 374 cm² groß. Wie groß ist a) die Kantenlänge, b) der Rauminhalt?

16.1.3. Die Körpermaße

Unsere Körpermaße heißen:

m^3		dm^3		cm^3		mm^3
1 m^3	=	1 000 dm^3	=	1 000 000 cm^3	=	1 000 000 000 mm^3
		1 dm^3	=	1 000 cm^3	=	1 000 000 mm^3
				1 cm^3	=	1 000 mm^3

Die Verwandlungszahl der Körpermaße ist 1 000,

d. h., ein Stellenwert ist immer **das Tausendfache** des nächstkleineren Stellenwertes.

16.1.4. Zusammenhang zwischen Körpermaßen, Hohlmaßen und Gewichten

Die **Einheit der Körper- und Hohlmaße** ist das **Kubikmeter.**

Wir füllen einen würfelförmigen Blechkasten von 1 dm Kantenlänge mit Wasser. Wir messen die Wassermenge: **1 dm^3 faßt 1 l**

Wir wiegen dieses l Wasser bei + 4° Celsius: **1 l wiegt 1 kg**

Unsere Körper-, Hohl- und Gewichtsmaße stehen also in einem engen Verhältnis: **1 dm^3 = 1 l = 1 kg**

Körpermaße	Hohlmaße		Gewichtsmaße
1 cm^3		Wasser bei +4°Celsius	1 g
1 dm^3	1 l	Wasser bei +4°Celsius	1 kg
1 m^3	1 000 l = 10 hl	Wasser bei +4°Celsius	1 t = 1 000 kg
	1 hl	Wasser bei +4°Celsius	1 dz = 100 kg

Angewandte Aufgaben

454. Ein Wasserhahn tropft. In der Minute zählen wir 25 Tropfen. Wieviel Liter Wasser tropfen in 1 Monat (30 Tage) weg, wenn man auf 1 cm^3 20 Tropfen rechnet?

455. Ein würfelförmiges Gefäß mit einer inneren Kantenlänge von 45 cm wird mit Wasser gefüllt. Wieviel Liter faßt das Gefäß?

456. Ein würfelförmiges Gefäß mit einer inneren Kantenlänge von 72 cm wird mit Wasser gefüllt. Wieviel kg wiegt das Wasser?

457. Ein leeres Faß wiegt 8,250 kg, mit Wasser gefüllt wiegt es 63,500 kg. Wieviel Liter Wasser enthält das Faß?

16.1.5. Spezifische Gewichte

Jeder **Körper** hat ein seiner Art entsprechendes **Gewicht.**

Dieses arteigene Gewicht eines Körpers nennt man **Artgewicht,** neuerdings kurz **Wichte** genannt, oder **spezifisches Gewicht.**

Das spezifische Gewicht eines Körpers gibt an, wievielmal schwerer bzw. leichter ein Körper ist als die gleiche Menge Wasser.

Beispiel:

Das spezifische Gewicht von **Sandstein** ist **2,5;**

denn **1 mm^3** Sandstein wiegt **2,5 mg,**
1 cm^3 Sandstein wiegt **2,5 g,**
1 dm^3 Sandstein wiegt **2,5 kg,**
1 m^3 Sandstein wiegt **2,5 t.**

Man berechnet das **Gewicht eines Körpers,** indem man den **Rauminhalt** des Körpers (das **Volumen**) mit seinem **spezifischen Gewicht** multipliziert.

Beispiel:

Sandstein: **32,5 cm^3** (Volumen) · **2,5** (spez. Gewicht) = **81,25 g** (Körpergewicht)
Marmor: **6,4 dm^3** (Volumen) · **2,7** (spez. Gewicht) = **17,280 kg** (Körpergewicht)

Volumen · spezifisches Gewicht = Körpergewicht

$$\frac{\text{Körpergewicht}}{\text{spez. Gewicht}} = \text{Volumen} \qquad \frac{\text{Körpergewicht}}{\text{Volumen}} = \text{spez. Gewicht}$$

Tabelle wichtiger spezifischer Gewichte

Platin	21,4	Granit	2,8	Meerwasser	1,03
Gold	19,3	Marmor	2,7	Wasser	1,00
Quecksilber	13,5	Glas	2,6	Wein	0,99
Blei	11,3	Sandstein	2,5	Eis	0,92
Silber	10,5	Ziegelstein	1,5	Alkohol	0,80
Kupfer	8,9	Ebenholz	1,2	Petroleum	0,78
Nickel	8,9	Eichenholz	0,7	Benzin	0,71
Eisen	7,8	Buchenholz	0,7	Luft	0,00129
Zinn	7,3	Tannenholz	0,5	Leuchtgas	0,00082
Aluminium	2,7	Kork	0,2	Helium	0,00018

Angewandte Aufgaben

458. Wieviel wiegt 1 l Wasser, Quecksilber, Wein, Benzin?

459. Wieviel wiegt 1 hl Wein, Meerwasser, Petroleum, Alkohol?

460. Wieviel wiegt 1 m^3 Eichen-, Buchen-, Tannenholz?

461. Wieviel wiegt ein 8 cm hoher Würfel aus Marmor (aus Eisen)?

462. Wieviel wiegt ein Bleiwürfel von 25 cm Seitenlänge?

463. Ein würfelförmiger Granitblock hat eine Kantenlänge von 48 cm. Wie schwer ist er?

464. Wie schwer ist die Luft in einem würfelförmigen Zimmer von 4,50 m Seitenlänge?

465. Wieviel Marmorwürfel von 50 cm Seitenlänge kann man auf einen Doppelwagen (20 t) laden?

466. Ein Stück Eisen wiegt 88,140 kg. Wie groß ist der Rauminhalt?

467. Die Kantenlänge eines Bleiwürfels, der 19,5264 kg wiegt, beträgt 12 cm. Berechnen Sie das spezifische Gewicht von Blei!

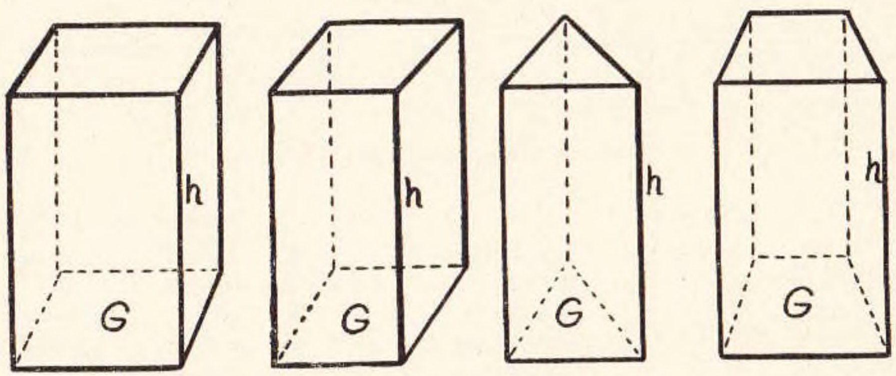
16.2. Das Prisma

Das **Prisma**, auch **Säule** oder **Quader** genannt, ist ein Körper mit **zwei deckungsgleichen (kongruenten) Grundflächen** und **rechteckigen Seitenflächen.**

Die **Grundfläche** kann ein **Drei-, Vier- oder Vieleck** sein.

Die **Anzahl der Seitenflächen** richtet sich nach der **Seitenzahl der Grundfläche.**

Arten der Prismen

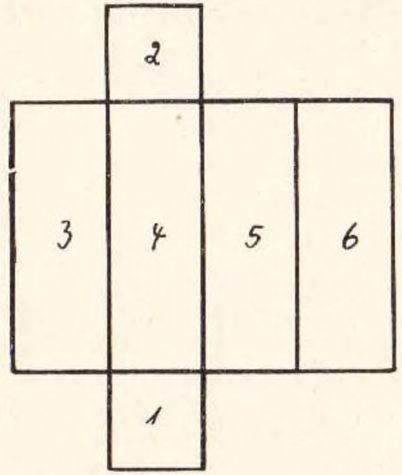


Die Gestalt eines Prismas wird durch die **Grundfläche (G)** bestimmt.

Die Grundfläche kann ein **Quadrat**, ein **Rechteck**, ein **Dreieck**, ein **Trapez** oder jedes **Vieleck** sein; infolgedessen unterscheidet man **drei-, vier- und vielseitige Prismen.**

Der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Kopffläche ist die **Höhe.**

16.2.1. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche



M (Mantel)
= **Summe aller Seitenflächen**

$$M = U \cdot h$$

O (Oberfläche)
= **Summe aller Flächen**

$$O = M + 2G$$

$$O = 2 \cdot (ab + ac + bc)$$

Die Zeichnung stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) einer **quadratischen Säule** dar. Die **Oberfläche** des Prismas besteht aus **2 quadratischen Grundflächen** und **4 rechteckigen Seitenflächen.** Die **4 Seitenflächen allein** bilden den **Mantel.**

16.2.1.1. Die Berechnung des Mantels

Die 4 Flächen des Mantels bilden insgesamt ein **Rechteck.**

Die **Grundseite des Rechtecks** ist gleich dem **Umfang der Grundfläche;** die **Höhe des Rechtecks** ist gleich der **Höhe des Prismas.**

Man berechnet also den **Mantel des Prismas:**

Umfang der Grundfläche · Höhe $\qquad M = U \cdot h$

16.2.1.2. Die Berechnung der Oberfläche

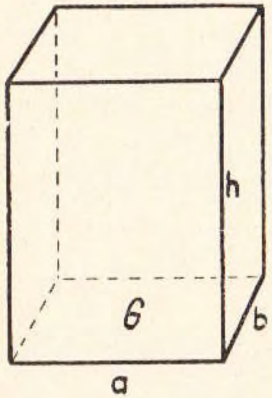
Zum **Mantel** zählen wir die beiden **Grundflächen (2 G)**, dann erhalten wir die **Oberfläche** des Prismas.

Man berechnet also die **Oberfläche des Prismas:**

Mantel + Grundfläche · 2 $\qquad O = M + 2G$

Bei der Rechtecksäule sind die Grundflächen Rechtecke, bei der Dreiecksäule Dreiecke usw.
Die **Berechnung der Oberfläche** ist bei allen Prismen die gleiche: $O = M + 2\,G$.

16.2.2. Die Berechnung des Rauminhalts



Volumen = Länge · Breite · Höhe

$$V = a \cdot b \cdot h$$

oder $G \cdot h$

Man berechnet das **Volumen des Prismas** wie das Volumen des Würfels:

Grundfläche · Höhe	$V = G \cdot h$
oder Länge · Breite · Höhe	$V = a \cdot b \cdot h$
Umkehrungen:	$\frac{V}{h} = G \quad \frac{V}{G} = h$

Angewandte Aufgaben

468. Normalgröße eines Ziegelsteines: Länge 25 cm, Breite 12 cm, Dicke 6,5 cm. Berechnen Sie a) die Oberfläche, b) den Inhalt, c) das Gewicht eines Steines! d) Wieviel Ziegelsteine gehen auf 1 m³?

469. Ein Dienstraum ist 28,60 m lang, 15,20 m breit und 7,50 m hoch. Berechnen Sie a) die Summe der 6 Innenflächen, b) den Rauminhalt des Saales!

470. Eine Baugrube von 15,75 m Länge und 10,50 m Breite soll 2,50 m tief ausgeschachtet werden. Wieviel m³ Erde sind wegzuschaffen?

471. Ein Haus ist 14,20 m lang und 9,60 m breit. Die Höhe bis zum Dach beträgt 12,80 m, bis zum First 15,30 m. Berechnen Sie den Rauminhalt des Hauses!

472. Eine 6,50 m breite Straße wird in 5 km Länge 12 cm hoch mit Kies bestreut. Wieviel Fuhren zu 4 m³ werden benötigt?

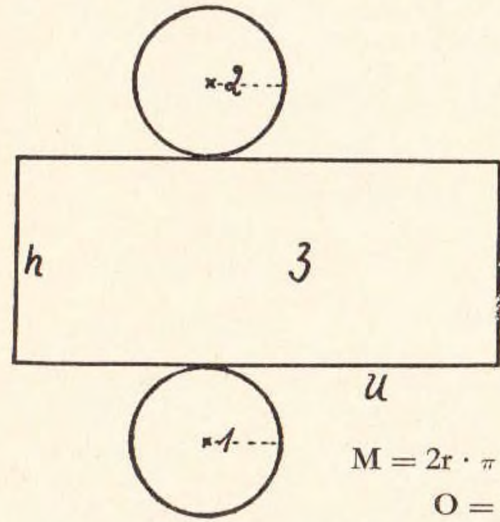
473. Eine Firma läßt einen Kabelgraben auswerfen, der 860 m lang und 75 cm tief ist; oben ist er 1,25 m und unten 0,65 m breit. Wieviel kostet das Auswerfen der Erde, wenn das m³ mit 14,50 DM berechnet wird?

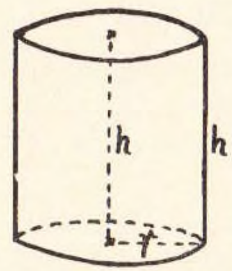
474. Ein Grabstein aus Granit, der die Form eines rechteckigen Prismas hat, wiegt 614,250 kg. Die Länge der Grundfläche ist 0,65 m, die Breite 0,45 m. Berechnen Sie die Höhe des Grabsteins!

16.3. Die Walze

Die **Walze,** auch **Rundsäule** genannt, ist ein Körper mit **zwei deckungsgleichen (kongruenten) Kreisflächen** und einer **gekrümmten Seitenfläche.**
Die Gestalt der Walze wird durch die **Grundfläche (G)** bestimmt.
Die **Grundfläche** ist immer eine **Kreisfläche.**
Der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Kopffläche ist die **Höhe** oder **Achse.**
Eine Rundsäule, die innen hohl ist, nennt man **Hohlsäule** oder **Zylinder.**
Die **Grundfläche der Hohlsäule** ist ein **Kreisring.**

16.3.1. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche





$$M = 2r \cdot \pi \cdot h \qquad V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

$$O = 2r^2 \cdot \pi + 2r \cdot \pi \cdot h$$

Die Zeichnung links stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) der **Walze** dar.
Die **Oberfläche** der Walze besteht aus **2 kreisförmigen Grundflächen** und **1 rechteckigen Seitenfläche.**

Die **Seitenfläche allein** bildet den **Mantel.**

16.3.1.1. Die Berechnung des Mantels

Der Mantel ist ein **Rechteck.**
Die **Grundseite des Rechtecks** ist gleich dem **Umfang der Grundfläche.**
Die **Höhe des Rechtecks** ist gleich der **Höhe der Walze.**
Man berechnet also den **Mantel der Walze:**

Umfang der Grundfläche · Höhe $$M = 2r \cdot \pi \cdot h$$

16.3.1.2. Die Berechnung der Oberfläche

Zum **Mantel** zählen wir die beiden **Grundflächen** ($2r^2 \cdot \pi$), dann erhalten wir die **Oberfläche** der Walze.
Man berechnet also die **Oberfläche der Walze:**

Mantel + Grundfläche · 2 $$O = 2r \cdot \pi \cdot h + 2r^2 \cdot \pi$$

16.3.2. Die Berechnung des Rauminhalts

Man berechnet das **Volumen der Walze** wie das Volumen des Prismas:

Grundfläche · Höhe = **G · h**

Da die **Grundfläche** eine **Kreisfläche** ist, heißt die Formel:

Grundfläche · Höhe $$V = G \cdot h \text{ oder } r^2 \cdot \pi \cdot h$$

16.3.3. Die Berechnung des Zylinderrings

Die **Grundfläche** des Zylinderrings ist ein **Kreisring.**
Wir berechnen den **Vollzylinder** und subtrahieren den **Hohlzylinder.**
Man berechnet das **Volumen des Zylinderrings:**

Vollzylinder — Hohlraum = Zylinderring $$R^2 \cdot \pi \cdot h - r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Angewandte Aufgaben

475. Eine Walze (Rundsäule) hat einen Durchmesser von 14 cm und eine Höhe von 42 cm. Berechnen Sie a) den Mantel, b) die Oberfläche, c) den Inhalt!

476. Die 8 runden Säulen einer Kirche sollen gestrichen werden. Die Säulen sind 4,35 m hoch und haben einen Durchmesser von 76 cm. 1 m² Ölanstrich kostet 7,20 DM. Wieviel kostet der Ölanstrich?

477. Wieviel kostet ein 4,80 m langer walzenförmiger Baumstamm mit einem Umfang von 1,32 m, wenn 310 DM für 1 m³ gezahlt werden?

478. Ein Mühlstein (Sandstein) mit einem Durchmesser von 1,60 m und einer Dicke von 24 cm hat in der Mitte eine quadratische Öffnung von 18 cm Seitenlänge. Berechnen Sie das Gewicht des Mühlsteines!

479. Wie schwer ist eine Rundsäule aus Marmor, deren Umfang 3,8936 m und deren Höhe 12 m beträgt?

480. Ein rundes Feuerlöschbecken von 4 m Durchmesser und 1,50 m Tiefe soll durch eine Röhre gefüllt werden, die in der Minute 80 l Wasser liefert. In wieviel Stunden ist das Becken gefüllt?

481. Ein Brunnenschacht von 1,40 m Durchmesser und 6,75 m Tiefe soll ausgehoben werden. a) Was kostet das Ausschachten, wenn 1 m³ mit 16,40 DM berechnet wird? b) Wieviel m³ Mauerwerk hat der Brunnen, wenn die Mauer 25 cm dick ist? c) Wieviel kostet die Mauer, wenn 1 m³ mit 184 DM berechnet wird?

482. Wie schwer ist ein 12 m langes Bleirohr, wenn der innere Durchmesser 6 cm und die Wandstärke 1 cm beträgt?

483. Ein zylinderförmiger Benzintank hat einen Umfang von 3,768 m und faßt 20,3472 hl Benzin. Wie lang ist der Tank?

484. In einem Brunnen, in dem das Wasser 1,75 m hoch steht, befinden sich 3 090,9375 l Wasser. Berechnen Sie den Durchmesser des Brunnens!

16.4. Die Pyramide

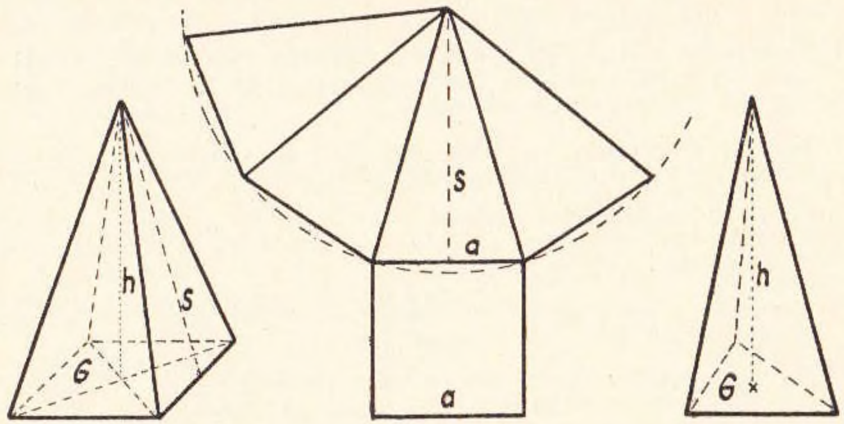
Die **Pyramide** ist ein Körper mit einer **geradlinigen Grundfläche** und **dreieckigen Seitenflächen,** die in einer **Spitze** zusammenstoßen.

Die **Grundfläche** der Pyramide kann ein gleichseitiges **Dreieck,** ein **Quadrat** oder ein regelmäßiges **Vieleck** sein; infolgedessen gibt es **drei-, vier- und vielseitige Pyramiden.**

Die **Seitenflächen** der Pyramide sind **deckungsgleiche (kongruente) gleichschenklige Dreiecke.** Die **Anzahl der Seitenflächen,** die man mit **n** bezeichnet, hängt von der **Seitenzahl der Grundfläche** ab.

Den senkrechten Abstand von der Mitte der **Grundfläche** zur **Spitze** nennt man **Höhe (h),** den senkrechten Abstand von der Mitte der **Grundkante** zur **Spitze** nennt man **Seitenhöhe (s).**

16.4.1. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche



$$M = \frac{a \cdot s}{2} \cdot n \qquad O = a^2 + \frac{a \cdot s}{2} \cdot n \qquad V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Die Zeichnung in der Mitte stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) einer **Pyramide mit quadratischer Grundfläche** dar.

Die **Oberfläche** dieser Pyramide besteht aus einer **quadratischen Grundfläche** und aus **vier inhaltsgleichen dreieckigen Seitenflächen.**

Die **Seitenflächen allein** bilden den **Mantel.**

16.4.1.1. Die Berechnung des Mantels

Eine **Seitenfläche** der Pyramide (ein Dreieck) wird berechnet:

$$\frac{\textbf{Grundkante} \cdot \textbf{Seitenhöhe}}{2} \qquad \frac{a \cdot s}{2}$$

Da die 4 Seitenflächen inhaltsgleich sind, multiplizieren wir mit 4.

Man berechnet also den **Mantel der Pyramide:**

$$\frac{\textbf{Grundkante} \cdot \textbf{Seitenhöhe} \cdot 4}{2} \qquad M = \frac{a \cdot s}{2} \cdot 4$$

16.4.1.2. Die Berechnung der Oberfläche

Zum **Mantel** addieren wir die **Grundfläche** (a^2), dann erhalten wir die **Oberfläche.** Man berechnet also die **Oberfläche der quadratischen Pyramide:**

Grundfläche + Mantel

$$O = a^2 + \frac{a \cdot s}{2} \cdot 4$$

Die **Oberfläche** der **drei- und vielseitigen Pyramiden** wird berechnet:

Grundfläche + **Seitenfläche** · **Flächenanzahl (n)**, also: $a^2 + \frac{a \cdot s}{2} \cdot n$

16.4.2. Die Berechnung des Rauminhalts

Wir füllen ein **Prisma** mit feinem Sand.

Dann schütten wir den Sand in eine **dazugehörige Pyramide,** d. h., in eine Pyramide, die die **gleiche Grundfläche** und die **gleiche Höhe** hat.

Wir stellen fest:

Die **Pyramide** läßt sich mit dem Sand des dazugehörigen Prismas **3mal füllen.**

Merken Sie:

Das Volumen der Pyramide ist $\frac{1}{3}$ vom Volumen des dazugehörigen Prismas.

Man berechnet also das **Volumen der Pyramide:**

$$\frac{\textbf{Grundfläche} \cdot \textbf{Höhe}}{3} \qquad V = \frac{G \cdot h}{3}$$

Angewandte Aufgaben

485. Berechnen Sie den Mantel einer dreiseitigen Pyramide, deren Grundkante 16 cm und deren Seitenhöhe 24 cm beträgt!

486. Berechnen Sie die Oberfläche einer quadratischen Pyramide, deren Grundkante 54 cm und deren Seitenhöhe 36 cm mißt!

487. Berechnen Sie den Rauminhalt einer quadratischen Pyramide, deren Grundkante 42 cm und deren Höhe 1,40 m lang ist!

488. Wie groß ist das Volumen einer 36 cm hohen Pyramide mit trapezförmiger Grundfläche, deren große Grundlinie 24 cm, deren kleine Grundlinie 18 cm und deren Höhe 12 cm beträgt?

489. Ein sechsseitiges Kirchturmdach, das die Form einer Pyramide hat, wird mit Schiefer gedeckt. Die Grundkante ist 1,60 m, die Seitenhöhe 8,50 m. Der Schieferbelag kostet je m² 31,60 DM. Wie hoch ist der Rechnungsbetrag?

490. Die Cheops-Pyramide in Ägypten hat eine Höhe von 137 m; die quadratische Grundfläche hat eine Seitenlänge von 222 m. Berechnen Sie den Rauminhalt!

491. Eine Pyramide aus Sandstein (spez. Gewicht 2,5) hat als Grundfläche ein Rechteck von 1,20 m Länge und 0,85 m Breite. Die Höhe mißt 2,30 m. Wie schwer ist die Pyramide?

492. Eine quadratische Pyramide mit einer Grundkante von 25 cm hat einen Rauminhalt von 7 500 cm³. Wie groß ist die Höhe?

493. Die Höhe einer Pyramide beträgt 45 cm, das Volumen 8 640 cm³. Berechnen Sie die Grundfläche!

494. Eine 2,40 m hohe Pyramide aus Granit (spez. Gewicht 2,8), deren Grundfläche quadratisch ist, hat ein Gewicht von 1,6184 t. Wie lang ist die Grundkante?

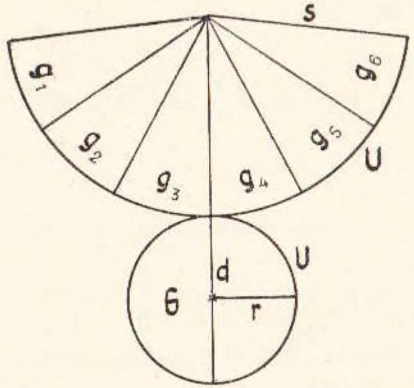
16.5. Der Kegel

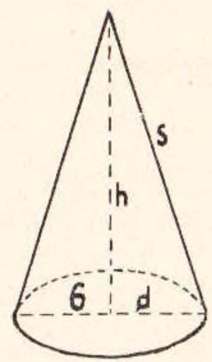
Der **Kegel** ist ein spitz zulaufender Körper mit einer **kreisförmigen Grundfläche (G)** und einer **gekrümmten Mantelfläche (M).**

Der senkrechte Abstand von der Grundfläche zur Spitze heißt **Höhe (h).**

Der Abstand vom Umfang der Grundfläche zur Spitze heißt **Seitenhöhe (s).**

16.5.1. Die Berechnung des Mantels und der Oberfläche





Die Zeichnung links stellt die **Oberfläche** (das **Netz**) eines **Kegels** dar.

Die **Oberfläche** des Kegels besteht aus einer **kreisförmigen Grundfläche** und aus einem **Kreisausschnitt,** der den **Mantel** bildet.

16.5.1.1. Die Berechnung des Mantels

Der **Mantel des Kegels** besteht aus einer **Summe von Dreiecken:**

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 \cdot \cdot \cdot \cdot + g_n$$

(Wir denken uns den Kreisausschnitt in so viele winzige Dreiecke zerlegt, daß die Grundseiten der einzelnen Dreiecke gerade Linien bilden.)

Der **Kreisausschnitt** bildet nun als Summe der vielen Dreiecke **ein großes Dreieck,** dessen **Grundlinie** gleich dem **Umfang (U)** der Grundfläche und dessen **Höhe** gleich der **Seitenhöhe (s)** des Kegels ist.

Wir berechnen nun den **Mantel** als **Dreieck:**

$$M = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{U \cdot s}{2} = \frac{2r \cdot \pi \cdot s}{2} = r \cdot \pi \cdot s$$

Erklärung:

Das **Dreieck** wird berechnet: $\frac{g \cdot h}{2}$

Für die **Grundlinie (g)** setzen wir den **Umfang (U),** und für die **Höhe (h)** setzen wir die **Seitenhöhe (s)** ein: $\frac{U \cdot s}{2}$

Für U setzen wir dann $2r \cdot \pi$ ein, also: $\frac{2r \cdot \pi \cdot s}{2}$

Die gekürzte Formel heißt nun: $r \cdot \pi \cdot s$

Man berechnet also den **Mantel des Kegels:**

Radius · 3,14 · Seitenhöhe $M = r \cdot \pi \cdot s$

16.5.1.2. Die Berechnung der Oberfläche

Zum **Mantel** des Kegels zählen wir die **Grundfläche** ($r^2 \cdot \pi$), dann erhalten wir die **Oberfläche.**

Man berechnet also die **Oberfläche des Kegels:**

Grundfläche + Mantel $O = r^2 \cdot \pi + r \cdot s \cdot \pi$

16.5.2. Berechnung des Rauminhalts

Wir füllen einen **Kegel** mit feinem Sand.

Dann schütten wir den Sand in eine **dazugehörige Walze**, d. h. in eine Walze, die die **gleiche Grundfläche** und die **gleiche Höhe** hat.

Wir stellen fest:

Der **Kegel** läßt sich mit dem Sand der dazugehörigen Walze **3mal füllen.**

Merken Sie:

Das Volumen des Kegels ist $\frac{1}{3}$ vom Volumen der dazugehörigen Walze.

Man berechnet das **Volumen der Walze:**

$$\frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}}{3} \qquad V = \frac{G \cdot h}{3} \text{ oder } \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}$$

Angewandte Aufgaben

495. Berechnen Sie den Mantel und die Oberfläche eines Kegels,

a) dessen Radius 8 cm und dessen Seitenhöhe 24 cm beträgt;
b) dessen Umfang 37,68 cm und dessen Seitenhöhe 25 cm lang ist!

496. Berechnen Sie den Rauminhalt eines Kegels, dessen Radius 12 cm und dessen Höhe 48 cm beträgt!

497. Der Durchmesser der Grundfläche eines kegelförmigen Zeltes beträgt 26,40 m, die Höhe 12,60 m, die Seitenhöhe 18,40 m. a) Berechnen Sie den Luftraum des Zeltes! b) Wieviel m² Zelttuch werden benötigt, wenn für Verschnitt und Nähte 12% gerechnet werden?

498. Das kegelförmige Dach eines Turmes soll mit Zinkblech belegt werden. Der Umfang der Grundfläche mißt 15,072 m, die Seitenhöhe 8,50 m. Wieviel kostet das Belegen mit Zinkblech, wenn für Verschnitt 10% und für 1 m² 33,50 DM gerechnet werden?

499. Ein kegelförmiger Fichtenstamm von 12,60 m Länge hat an der Erde einen Umfang von 81,64 cm. Der Preis für 1 m³ Fichtenholz beträgt 154 DM; das spez. Gewicht ist 0,45. Berechnen Sie a) den Rauminhalt, b) den Preis, c) das Gewicht des Stammes!

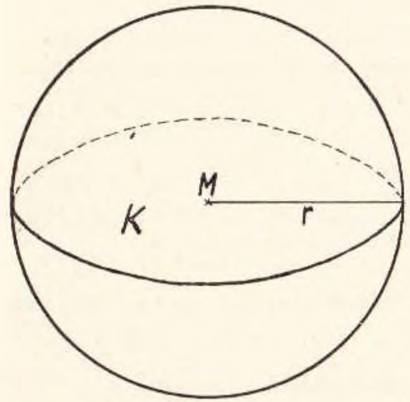
500. Ein 7,50 m hoher Kegel hat einen Rauminhalt von 15,386 m³. Berechnen Sie den Radius des Kegels!

501. Ein kegelförmiger Sandhaufen von 53,851 m³ Rauminhalt hat an der Grundfläche einen Umfang von 21,98 m. Berechnen Sie die Höhe des Sandhaufens!

502. Welches Volumen hat ein Kegel, dessen Höhe 20 cm und dessen Seitenhöhe 29 cm beträgt?

16.6. Die Kugel

Eine **Kugel** ist ein **runder Körper** mit einer **gleichmäßig gekrümmten Oberfläche.**



O = **Kugeloberfläche**
M = **Kugelmittelpunkt**
r = **Kugelhalbmesser**
D = **Kugeldurchmesser**
K = **größte Kugelkreisfläche**
U = **Kugelumfang**
V = **Kugelinhalt**

Die Fläche, die eine Kugel umschließt, ist die **Kugeloberfläche (O).**

Der Punkt im Innern der Kugel, der von allen Punkten der Kugeloberfläche gleich weit entfernt ist, heißt **Kugelmittelpunkt (M).**

Die Entfernung von der Kugeloberfläche zum Kugelmittelpunkt ist der **Kugelhalbmesser (r).**

Die Entfernung von der Kugeloberfläche durch den Kugelmittelpunkt zum gegenüberliegenden Punkt der Kugeloberfläche ist der **Kugeldurchmesser (D).**

Jeder Schnitt durch eine Kugel ergibt eine Kreisfläche. Je weiter der Schnitt vom Kugelmittelpunkt entfernt ist, desto kleiner, je näher er an den Kugelmittelpunkt heranrückt, desto größer ist die Kreisfläche.

Der Schnitt durch den Kugelmittelpunkt bildet die **größte Kugelkreisfläche (K);** er teilt die Kugel in zwei gleiche Hälften, in zwei **Halbkugeln.**

Die Linie, die die größte Kugelkreisfläche begrenzt, ist der **Kugelumfang (U).**

Den Rauminhalt einer Kugel nennen wir **Kugelinhalt (V).**

16.6.1. Die Berechnung der Oberfläche

Wir teilen eine **Kugel** (Globus) in **zwei Halbkugeln.**

Im Mittelpunkt der größten **Kugelkreisfläche** befestigen wir mit einem Stift das Ende einer Schnur und bedecken mit dieser in spiralförmigen Windungen die ganze Kreisfläche.

Wir wickeln die Schnur wieder ab, befestigen das eine Ende am Nordpol des Globus und bedecken mit der Schnur in spiralförmigen Windungen die **Oberfläche der Halbkugel.**

Wir stellen dabei fest:

Um die **Oberfläche der Halbkugel** zu bedecken, benötigen wir die **doppelte Länge** der Schnur, um die **ganze Kugeloberfläche** zu bedecken **das Vierfache.**

Merken Sie:

Die Kugeloberfläche ist 4mal so groß wie die größte Kugelkreisfläche.

Man berechnet also die **Oberfläche der Kugel:**

Größte Kugelkreisfläche · 4 $O = K \cdot 4$ oder $4r^2 \cdot \pi$

16.6.2. Die Berechnung des Rauminhalts

Eine **Kugel** besteht aus **vielen gleich großen Pyramiden,** deren **Grundflächen** in der **Kugeloberfläche und** deren **Spitzen** im **Kugelmittelpunkt** liegen.

Die **Summe** der winzig klein gedachten **Grundflächen** der Pyramiden ist **gleich** der **Kugeloberfläche,** die **Pyramidenhöhen** sind **gleich** dem **Kugelradius.**

Man berechnet also den **Rauminhalt der Kugel** als **Pyramide:**

$$V = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4r^2 \cdot \pi \cdot r}{3} = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$$

Erklärung:

Die **Pyramide** wird berechnet: $\frac{G \cdot h}{3}$

Die **Grundfläche der Pyramide (G)** ist **gleich** der **Kugeloberfläche (O),** die **Höhe der Pyramide (h)** ist **gleich** dem **Kugelradius (r).**

Für die **Grundfläche (G)** setzen wir die **Kugeloberfläche (O)** und für die **Höhe (h)** den **Kugelradius (r)** ein: $\frac{O \cdot r}{3}$

Für die **Kugeloberfläche (O)** setzen wir nun $4\,r^2 \cdot \pi$ ein: $\frac{4r^2 \cdot \pi \cdot r}{3}$

Sodann stellen wir die Faktoren der Formel um: $\frac{4\,r^2 \cdot r \cdot \pi}{3}$

und setzen r^3 für $r^2 \cdot r$ ein, also: $\frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$

Man berechnet also das **Volumen der Kugel:**

Kugeloberfläche · Radius : 3 $V = \frac{4r^3 \cdot \pi}{3}$

Angewandte Aufgaben

503. Berechnen Sie 1. die Oberfläche, 2. den Rauminhalt folgender Kugeln: a) Radius 14 cm, b) Durchmesser 36 cm, c) Umfang 50,24 cm!

504. Wieviel g wiegen diese 3 Kugeln, wenn die erste aus Ebenholz, die zweite aus Glas und die dritte aus Blei ist?

505. Der Umfang einer Halbkugel ist 113,04 cm. Wie groß ist die Oberfläche?

506. Eine hohle Halbkugel hat einen Umfang von 288,88 cm. Wieviel Liter faßt die Halbkugel?

507. Der Durchmesser einer Billardkugel ist 6 cm. Wie schwer sind 3 Billardkugeln, wenn das spezifische Gewicht des Elfenbeins 1,9 beträgt?

508. Eine halbkugelförmige Kuppel mit einem Durchmesser von 6,40 m soll mit Zinkblech belegt werden. Für Verschnitt werden 10% gerechnet. Wieviel kostet das Belegen der Kuppel, wenn 1 m² mit 32,50 DM berechnet wird?

509. Eine Kugel aus Eichenholz, die einen Durchmesser von 22 cm hat, wird 2 cm abgeschliffen. Wieviel verliert die Kugel an Gewicht?

Handbuch der Fernmeldetechnik

— Buchreihe AFt —

Band 1 — **Allgemeine Berufskunde** (mit Repetitor)

Band 2 — **Grundkenntnisse der Mathematik und der Physik** (mit Beiheft)

Band 3 a (2 Teile) — **Grundlagen der Gleich- und Wechselstromlehre** (mit Repetitor)

Band 3 b — **Aufgabensammlung zu Band 3 und Band 4**

Band 4 — **Grundlagen der Elektronik** (mit Repetitor)

Band 5 — **Stoffkunde, Werkstoffkunde, Werkstoffbearbeitung und Technisches Zeichnen** (mit Repetitor)

Band 6 (2 Teile) — **Fernsprechapparate, Fernsprechentstörung und Nebenstellenanlagen** (mit Beiheft und Repetitor)

Band 7 (2 Teile) — **Linientechnik** (mit Repetitor)

Band 8 — **Grundlagen der Vermittlungstechnik** (mit Beiheft und Repetitor)

Band 9 — **Übertragungs- und Datentechnik** (mit Repetitor)

Sonderbände

Deutschlehre (mit Beiheft)

Postordnung, Postzeitungsordnung, Postreiseordnung und die Postzollvorschriften in Frage und Antwort (2 Bände)

Die Leitbehelfe im Postbeförderungsdienst

Gebührenvorschriften

Wie fertige ich meine Prüfungsarbeiten in den Prüfungen für den mittleren Postdienst

— Weitere Lehr- und Lernwerke siehe 2. und 4. Umschlagseite —