Fachrechnen

Inhaltsverzeichnis

5. 65

Aufgabensammlung

1. Die ersten vier Grundrechenarten

Die ersten vier Grundrechenarten werden bei der Behandlung des Themas »Fachrechnen« als bekannt vorausgesetzt. Hier sollen deshalb nur einzelne Begriffe noch einmal in Erinnerung gebracht werden, um dann im nächsten Abschnitt mit dem Bruchrechnen zu beginnen.

Die Grundrechenarten sind:

Zusammenzählen (Addition) addieren

Summand plus Summand gleich Summe

$$5 + 7 = \underline{\underline{12}}$$
$$7 + 5 = \underline{\underline{12}}$$
$$17 + 31 = \underline{\underline{48}}$$
$$31 + 17 = \underline{\underline{48}}$$

Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

Abziehen (Subtraktion) subtrahiren

Minuend minus Subtrahend gleich Differenz

$$12 - 7 = \underline{\underline{5}}$$
$$12 - 5 = \underline{\underline{7}}$$
$$48 - 31 = \underline{\underline{17}}$$
$$48 - 17 = \underline{\underline{31}}$$

Die Subtraktion ist die Umkehrung der Addition.

Malnehmen (Multiplikation) multiplizieren

Faktor mal Faktor gleich Produkt

$$7 \cdot 4 = \underline{\underline{28}}$$
$$4 \cdot 7 = \underline{\underline{28}}$$
$$13 \cdot 12 = \underline{\underline{156}}$$
$$12 \cdot 13 = \underline{\underline{156}}$$

Die Reihenfolge der Faktoren ist beliebig.

5. 65

Teilen (Division) dividieren

Dividend durch Divisor gleich Quotient

$$28 : 7 = \underline{\underline{4}}$$
$$28 : 4 = \underline{\underline{7}}$$
$$156 : 12 = \underline{\underline{13}}$$
$$156 : 13 = \underline{\underline{12}}$$

Die Division ist die Umkehrung der Multiplikation.

1.1. Bruchrechnen

Beim Dividieren lassen sich nicht alle Aufgaben so lösen, daß der Quotient eine ganze Zahl ist. Sollen z. B. 5 Streichhölzer durch 2 geteilt werden, so muß man **ein** Streichholz durchbrechen, um als Ergebnis »2 ganze und $^1/_2$ Streichholz« zu erhalten. Die Einheiten, mit denen bisher gerechnet wurde, muß man also in kleinere Teile zerlegen, um alle vorkommenden Aufgaben lösen zu können. Da man vor allem in der Praxis nicht vermeiden kann, daß ganze Einheiten geteilt werden müssen, wird die Notwendigkeit des Rechnens mit geteilten Einheiten ohne weiteres erkennbar. Dazu muß man aber die Menge und die Größe der Bruchstücke durch Zahlen angeben können. Dies geschieht mit Hilfe der **Brüche**.

Teilt man eine Einheit in acht Teile, so ist jedes Bruchstück so groß wie ein Achtel der Einheit. Will man dies durch einen Bruch ausdrücken, dann schreibt man einen Bruchstrich, unter den die 8 und über den die 1 gesetzt wird. Die Anzahl dieser Bruchstücke wird angegeben, indem die 1 über dem Bruchstrich mit der Zahl der Bruchstücke multipliziert wird.

$$3 \text{ mal } \frac{1}{8} = \frac{3 \cdot 1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}} = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}.$$

Der Zähler zählt die Anzahl der Teileinheiten Der Nenner nennt die Größe der Teileinheiten

Ein Bruch, bei dem Zähler und Nenner gleich sind, hat den Wert 1 $\left(\text{z. B. } \frac{3}{3}, \frac{4}{4}\right)$.

Ist der Wert eines Bruches kleiner als 1, dann nennt man einen solchen Bruch einen **»echten Bruch«** $\left(\text{z. B. } \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$.

Ist dagegen der Wert des Bruches größer als 1, der Zähler also größer als der Nenner, dann nennt man einen solchen Bruch einen **»unechten Bruch«** $\left(\text{z. B. } \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{7}\right)$.

Einen unechten Bruch kann man auch als **»gemischte Zahl«** schreiben, indem man die in dem Bruch enthaltenen ganzen Einheiten aus dem unechten Bruch herauszieht und den verbleibenden echten Bruch dazusetzt. Das Pluszeichen zwischen der Zahl der ganzen Einheiten und dem Bruch wird dabei weggelassen.

Beispiel

$$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{2\frac{1}{4}}}.$$

Umgekehrt kann man eine gemischte Zahl in einen unechten Bruch verwandeln:

$$2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{9}{4}}}.$$

Man verwandelt die ganze Zahl in einen unechten Bruch und addiert den unechten zum echten Bruch.

1.1.1. Addition und Subtraktion von Brüchen

Grundsätzlich können nur die Mengenzahlen **gleichartiger Gegenstände** addiert oder subtrahiert werden. Dies gilt selbstverständlich auch für die Brüche. Man kann nur Teilstücke **gleicher Größe,** also nur Brüche mit gleichem Nenner, sogenannte **gleichnamige Brüche,** addieren oder subtrahieren. Dies geschieht, indem man die Zähler addiert oder subtrahiert.

Gleichnamige Brüche werden addiert oder subtrahiert indem ihre Zähler addiert oder subtrahiert und den Nenner unverändert läßt

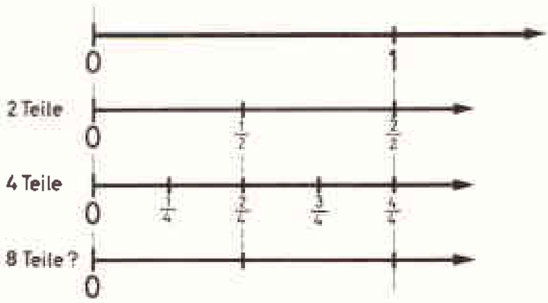
Beispiel $\frac{9}{11} + \frac{2}{11} - \frac{3}{11} = \frac{9+2-3}{11} = \underline{\underline{\frac{8}{11}}}.$

Sollen ungleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert werden, so müssen sie zuerst gleichnamig gemacht werden. Dies geschieht durch Erweitern oder Kürzen der Brüche, was mit Hilfe der sogenannten »Zahlengeraden« erklärt werden soll.

Wird die Strecke von 0 bis 1 in zwei gleiche Teile geteilt, ergibt sich auf der Zahlengeraden der Teilpunkt $\frac{1}{2}$.

Eine Teilung in vier gleiche Teile ergibt die Teilpunkte $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ und $\frac{3}{4}$, wobei die Einheitsstrecke selbst $\frac{4}{4}$ (= 1) darstellt. Da die Teilpunkte $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ einerseits und 1, $\frac{2}{2}$ und $\frac{4}{4}$ andererseits auf gleiche Stellen der Geraden fallen, müssen sie den gleichen Wert haben.

Abb. 1
Verschieden geteilte Zahlengerade



Würde die Strecke von 0 bis 1 weiter durch 6, 8, 10 usw. geteilt werden, dann wäre zu sehen, daß auch die Teilpunkte $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, $\frac{5}{10}$ usw. auf der Senkrechten liegen, die durch den Teilpunkt $\frac{1}{2}$ geht; diese Brüche haben also alle den gleichen Wert. (Beweise dies in der Abb. 1 für 8 gleiche Teile!)

Betrachtet man in Abb. 1 Brüche gleichen Wertes $\left(\text{hier z. B. } \frac{1}{2}, \frac{2}{4}\right)$, so ist zu sehen, daß man den Bruch $\frac{1}{2}$ in den Bruch $\frac{2}{4}$ umwandeln kann, indem man Zähler **und** Nenner des ersten Bruches mit der gleichen Zahl multipliziert (erweitert).

Ein Bruch wird erweitert in dem man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert

Beispiel $\frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{\underline{\underline{12}}}.$

Ebenso ändert sich der Wert eines Bruches nicht, wenn man Zähler **und** Nenner durch die gleiche Zahl dividiert (kürzt).

Ein Bruch wird gekürzt, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche Zahl dividiert

Beispiel $\frac{12}{24} = \frac{12:4}{24:4} = \frac{3}{6} = \frac{3:3}{6:3} = \frac{1}{\underline{\underline{2}}}.$

Sollen ungleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert werden, so muß man die einzelnen Brüche so erweitern, daß sie alle den gleichen Nenner, den **Hauptnenner,** erhalten.

Der **Hauptnenner** ist diejenige **kleinstmögliche Zahl,** die **alle Einzelnenner** enthält.

Es gibt verschiedene Methoden, den Hauptnenner zu ermitteln. Eine davon soll hier kurz beschrieben werden:

$$\frac{1}{20} + \frac{1}{6} - \frac{1}{40} = ?$$

Jeder Nenner wird in seine kleinstmöglichen Faktoren (Primzahlen) zerlegt.

Zerlegen in Primzahlen	Berechnen des Hauptnenners
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ $6 = 2 \cdot 3$ $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = \underline{\underline{120}}$

Jeder dieser kleinstmöglichen Faktoren muß für die Berechnung des Hauptnenners **so oft als Faktor** gesetzt werden, wie er bei **einem** der **Einzelnenner** am **häufigsten** vorkommt (z. B. $2 \cdot 2 \cdot 2$). Kommt ein **bestimmter Faktor** (z. B. 3) bei den Nennerzahlen **nur einmal** vor, so ist diese Zahl für die Faktorengruppe zur Berechnung des Hauptnenners auch **nur einmal** anzusetzen.

Kommt ein Faktor bei mehreren Nennern **gleich oft** vor (wie hier **je einmal** die 5), so ist er auch in dieser Häufigkeit zur Berechnung des Hauptnenners zu setzen.

Dann ist das **Produkt dieser** so ermittelten **Faktoren** bzw. **Faktorengruppen** schließlich der gesuchte Hauptnenner (im vorliegenden Beispiel 120), auf den nun alle Brüche durch Erweitern umzurechnen sind.

$$\frac{1 \cdot 6}{20 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 20}{6 \cdot 20} - \frac{1 \cdot 3}{40 \cdot 3}$$
$$= \frac{6}{120} + \frac{20}{120} - \frac{3}{120}$$
$$= \frac{6 + 20 - 3}{120}$$
$$= \underline{\underline{\frac{23}{120}}}.$$

1. 1. 2. Multiplikation und Division von Brüchen

Die Regeln für das Multiplizieren von Brüchen können aus der Addition gleicher Summanden abgeleitet werden:

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3 + 3 + 3}{8} = \frac{9}{8} = \underline{\underline{1\frac{1}{8}}}.$$

In vereinfachter Schreibweise ergibt sich ebenso:

$$3 \cdot \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8} = \frac{9}{8} = \underline{\underline{1\frac{1}{8}}}.$$

Ein Bruch wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Zähler mit dieser Zahl multipliziert und den Nenner beibehält

Beispiele

$$5 \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7} = \frac{15}{7} = \underline{\underline{2\frac{1}{7}}};$$
$$\frac{7}{8} \cdot 5 = \frac{7 \cdot 5}{8} = \frac{35}{8} = \underline{\underline{4\frac{3}{8}}}.$$

Vor dem Multiplizieren sind Brüche zu kürzen, weil mit kleineren Zahlen leichter zu rechnen ist.

Jede ganze Zahl kann als Bruch mit dem Nenner »1« geschrieben werden:

$$5 = \frac{5}{1}; \quad 17 = \frac{17}{1}.$$

Die Aufgabe $5 \cdot \frac{3}{7}$ kann demnach auch so gelöst werden:

$$\frac{5}{1} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 7} = \frac{15}{7} = \underline{\underline{2\frac{1}{7}}}.$$

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert indem Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert werden

Beispiele

$$\frac{7}{8} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7 \cdot \overset{1*)}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{8}} \cdot 5} = \frac{7 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \underline{\underline{\frac{7}{10}}}$$

oder

$$\frac{48}{65} \cdot \frac{13}{32} = \frac{\overset{6}{\cancel{48}} \cdot \overset{1}{\cancel{13}}}{\underset{5}{\cancel{65}} \cdot \underset{4}{\cancel{32}}} = \frac{\overset{3}{\cancel{6}} \cdot 1}{5 \cdot \underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \underline{\underline{\frac{3}{10}}}.$$

Ein Bruch wird durch einen Bruch dividiert, indem man den ersten Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruches multipliziert

Beispiele

$$\frac{4}{5} : \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = \underline{\underline{2}},$$

$$\frac{3}{4} : \frac{9}{10} = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{9} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}.$$

Soll ein Bruch durch eine ganze Zahl geteilt werden, so denkt man sich die ganze Zahl als Bruch mit dem Nenner »1« geschrieben:

$$\frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{9} : \frac{3}{1} = \frac{7 \cdot 1}{9 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{7}{27}}}.$$

Da hierbei der Zähler des umgekehrten zweiten Bruches immer »1« ist, kann er beim Malnehmen wegbleiben, und man schreibt:

$$\frac{7}{9} : 3 = \frac{7}{9 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{7}{27}}}.$$

Ein Bruch wird durch eine Zahl dividiert indem man den Nenner mit der Zahl multipliziert und den Zähler beibehält

*) Vereinfachte Schreibweise des Kürzens! Hier wurden Zähler und Nenner durch 4 geteilt (gekürzt).

1. 2. Dezimalbruchrechnen

Dezimalbrüche sind Brüche, deren **Nenner dekadisch aufgebaut** sind $\left(\frac{1}{10} = 0{,}1;\ \frac{1}{100} = 0{,}01 \text{ usw.}\right)$.

Gemischte Dezimalbrüche sind ganze Zahlen, von denen die Dezimalbrüche durch ein Komma abgeteilt sind $\left(2\frac{7}{10} = 2{,}7;\ 3\frac{8}{1000} = 3{,}008\right)$.

Rechts vom Komma stehen, **nach rechts fortschreitend**, die **Zehntel, Hundertstel, Tausendstel, Zehntausendstel** usw.. Bei dem Dezimalbruch 0,1 steht demnach rechts vom Komma »1 Zehntel«.

Mit Dezimalbrüchen läßt sich rechnen wie mit ganzen Zahlen.

Ein Dezimalbruch läßt sich **auch als echter Bruch** schreiben, indem die **Ziffern hinter dem Komma** in den **Zähler** gesetzt werden und als **Nenner** eine »**1**« mit **so viel Nullen**, wie der Dezimalbruch **Stellen hinter dem Komma** hat, darunter geschrieben wird:

$$0{,}7 = \frac{7}{\underline{\underline{10}}}; \qquad 0{,}53 = \frac{53}{\underline{\underline{100}}}.$$

Unter Umständen kann dann der **echte Bruch** durch **Kürzen** vereinfacht werden:

$$0{,}475 = \frac{475}{1000} = \frac{19}{\underline{\underline{40}}}.$$

Jeder echte oder unechte **Bruch** ist eine **Divisionsaufgabe.** Man kann daher **jeden Bruch in einen Dezimalbruch umwandeln,** indem man die Division, die durch den Bruchstrich versinnbildlicht wird, tatsächlich durchführt.

Beispiele

$$\frac{1}{10} = 1 : 10 \qquad \frac{17}{40} = 17 : 40$$

$$\begin{array}{l} 1 \ : 10 = \underline{\underline{0{,}1}}; \\ \underline{\ 0\ } \\ 10 \\ \underline{10} \\ \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 17 \ : 40 = \underline{\underline{0{,}425}}. \\ \underline{160} \\ \ 100 \\ \ \ \underline{80} \\ \ \ 200 \\ \ \ \underline{200} \\ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Dezimalbrüche werden **wie ganze Zahlen addiert oder subtrahiert**; dabei ist nur darauf zu achten, daß die Stellen (Hunderter, Zehner, Einer, Zehntel, Hundertstel usw.) richtig untereinanderstehen und so **stellenrichtig** addiert bzw. subtrahiert werden.

Beispiele

$$0{,}0756 + 12{,}358 = \begin{array}{r} 0{,}0756 \\ \underline{+\ 12{,}358\ \ } \\ \underline{\underline{12{,}4336}}; \end{array}$$

$$12{,}4783 - 9{,}5667 = \begin{array}{r} 12{,}4783 \\ \underline{-\ 9{,}5667} \\ \underline{\underline{2{,}9116}}. \end{array}$$

Beim **Multiplizieren von Dezimalbrüchen** werden die Brüche vorerst **wie ganze Zahlen** — ohne Berücksichtigung der Kommas — multipliziert. Dann wird im Ergebnis das **Komma gesetzt,** das vom rechten Ende der Ergebniszahl aus so viele Stellen nach links abteilt, als die Summe der von rechts abgeteilten Stellen der beiden Faktoren ergibt.

Beispiel

$$0{,}\underbrace{00357}_{5} \cdot 4{,}\underbrace{25}_{2} = \underline{\underline{0{,}\underbrace{0151725}_{7}}}.$$

$$5 + 2 = 7$$

Beim **Dividieren** empfiehlt es sich, Dividend und Divisor so weit **dekadisch** zu **erweitern,** daß der **Divisor** eine **ganze Zahl** wird. Ein Komma im Ergebnis wird dann gesetzt, wenn beim Dividieren das im Dividenden verbliebene Komma überschritten wird.

Beispiele

```
 19,499 :  0,37 =            (mit 100 erweitert!)
1949,9  : 37    = 52,7;
185
 99
 74
 —  ←— Komma!
 25 9
 25 9
    0

0,012292 :  0,439 =          (mit 1000 erweitert!)
12,292   : 439    = 0,028;
 — ←— Komma!
12 2
12 29
 8 78
 3 512
 3 512
     0

 1,23012 :  72,36 =          (mit 100 erweitert!)
123,012  : 7236   = 0,017.
 —— ←— Komma!
123 0
123 01
 72 36
 50 652
 50 652
      0
```

1. 3. Reihenfolge der Rechenoperationen

Der Rechenansatz $2 + 3 \cdot 4$

könnte in dieser Schreibweise für die Ausführung der Rechnung verschieden verstanden werden, wäre nicht eine **eindeutige Festlegung** getroffen worden, die die **Reihenfolge der Rechenoperationen vorschreibt.**

Danach ist die **höherwertige** Rechenart stets **zuerst** durchzuführen, also das Multiplizieren und das Dividieren **vor** dem Addieren und dem Subtrahieren.

Punktrechnung geht vor Strichrechung
· und : vor + und -

Im vorstehenden Rechenansatz ist also zur Zahl 2 das Produkt aus 3 und 4 zu addieren. Das Ergebnis kann nur 14 sein!

Will man jedoch im Rechenansatz ausdrücken, daß die **Summe** der Zahlen 2 und 3 mit 4 multipliziert werden soll, so muß man dies durch **Setzen von Klammern** kenntlich machen:

$$2 + 3 \cdot 4 = 2 + 12 = \underline{\underline{14}},$$

$$\text{dagegen } (2 + 3) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = \underline{\underline{20}}.$$

Mit Hilfe von Klammern (unter Umständen verschiedener Art) läßt sich auch bei umfangreichen Aufgaben jede erforderliche Reihenfolge der Rechenoperationen festlegen.

Beispiele

$$\begin{aligned} & 3 \cdot (6 + 12) + 16 \cdot 3 + 8 \cdot 4 \\ = {} & 3 \cdot 18 + 48 + 32 \\ = {} & 54 + 48 + 32 = \underline{\underline{134}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 288 : (8 \cdot 4) + 5 \cdot (12 + 3) - 25 \\ = {} & 288 : 32 + 5 \cdot 15 - 25 \\ = {} & 9 + 75 - 25 = \underline{\underline{59}}. \end{aligned}$$

1. 4. Positive und negative Zahlen

Bei der Aufgabe $5 - 12 = \underline{\underline{-7}}$

ist das Ergebnis eine Zahl mit negativem Vorzeichen (sogenannte **negative Zahl**). Die Zahlen können nämlich auf den Wert »0« der **Zahlengeraden** bezogen werden, deren **nach rechts** laufender Strahl dann die **positiven**, deren **nach links** laufender Strahl die **negativen Zahlen** trägt (Abb. 2). Zahlen, die durch Vorzeichen auf den Wert »0« der Zahlengeraden bezogen sind, werden **relative Zahlen** genannt.

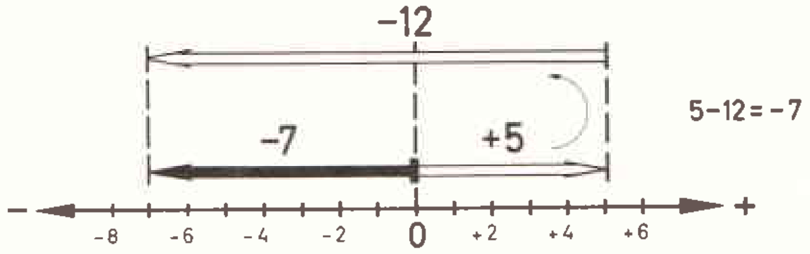


Abb. 2

Werden die Rechenregeln für die vier Grundrechenarten auf relative Zahlen angewendet, so sind die Vorzeichen besonders zu beachten. Die Regeln für das Rechnen mit diesen Zahlen werden nachstehend angegeben.

Für **Addition** und **Subtraktion** gelten:

Zwei gleiche Vorzeichen vor einer Zahl können durch ein „+", zwei ungleiche Vorzeichen durch ein „-" ersetzt werden

$+(+1) = \underline{\underline{(+1)}}$ $\qquad$ $+(-1) = \underline{\underline{(-1)}}$

$-(-1) = \underline{\underline{(+1)}}$ $\qquad$ $-(+1) = \underline{\underline{(-1)}}$

Der **Rechenbefehl »+«** wird auf der Zahlengeraden dargestellt, indem **in der Zählrichtung** der nachfolgenden relativen Zahl weitergezählt wird.

Beispiele $(+8) + (+4) = \underline{\underline{(+12)}}$, *(s. Abb. 3)*
$(+4) + (+8) = \underline{\underline{(+12)}}$;

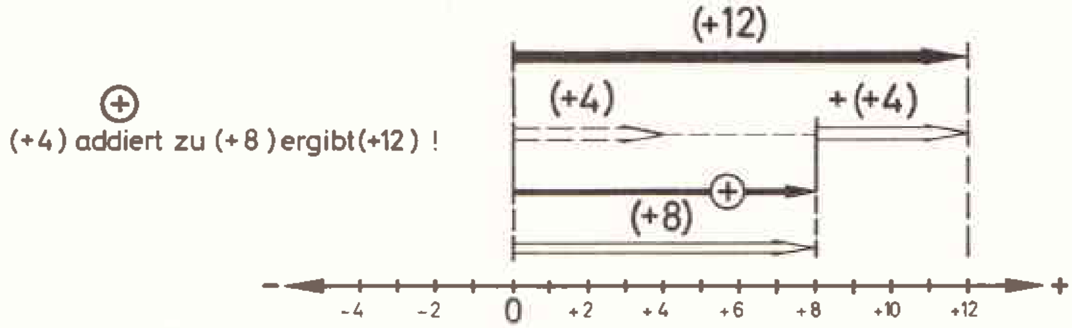


Abb. 3

$(-8) + (-4) = \underline{\underline{(-12)}}$, *(s. Abb. 4)*
$(-4) + (-8) = \underline{\underline{(-12)}}$.

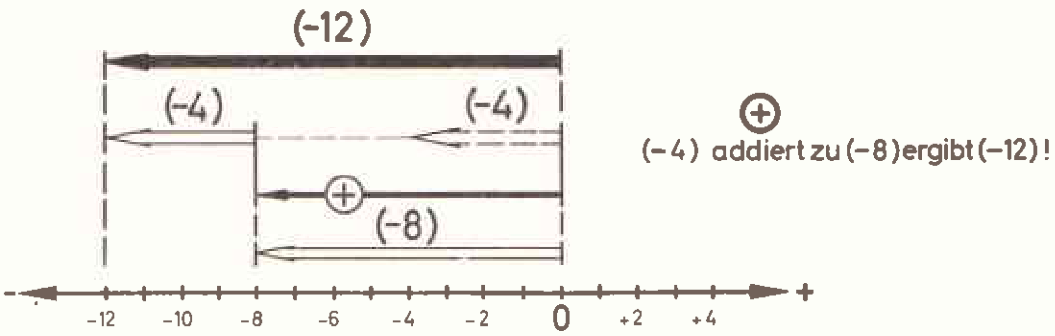


Abb. 4

Der **Rechenbefehl »—«** wird auf der Zahlengeraden dargestellt, indem **in der entgegengesetzten Zählrichtung** der nachfolgenden relativen Zahl weitergezählt wird.

Beispiele $(+8) - (+3) = \underline{\underline{(+5)}}$, *(s. Abb. 5)*
$(+8) - (+5) = \underline{\underline{(+3)}}$;

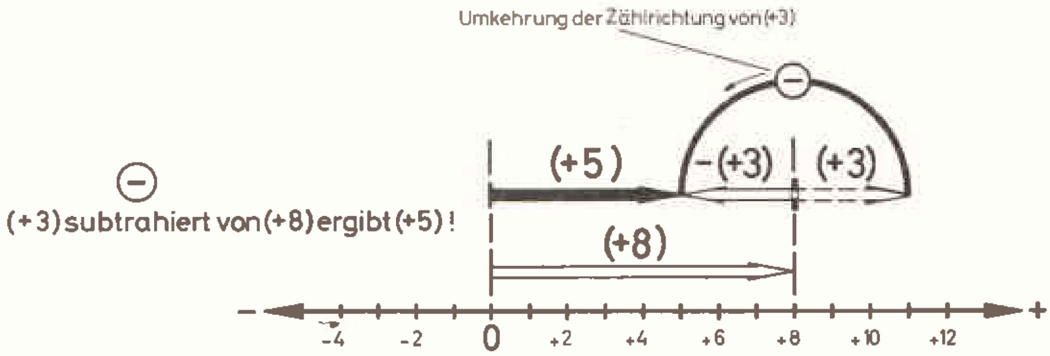


Abb. 5

5. 65

$$(+3) - (+8) = \underline{\underline{(-5)}}\,; \qquad (s.\ Abb.\ 6)$$

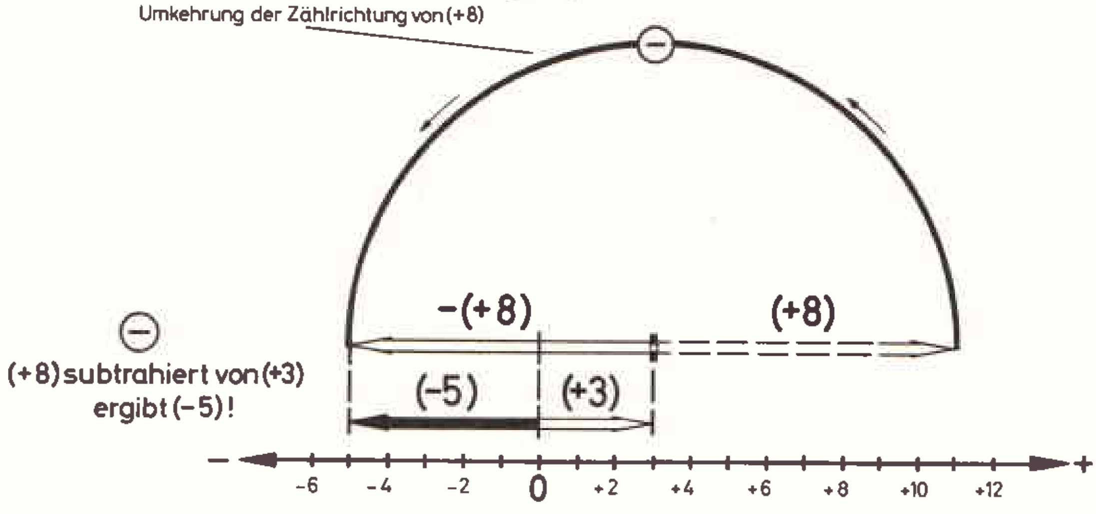


Abb. 6

$$(-10) - (-6) = \underline{\underline{(-4)}}, \qquad (s.\ Abb.\ 7)$$
$$(-10) - (-4) = \underline{\underline{(-6)}}\,;$$

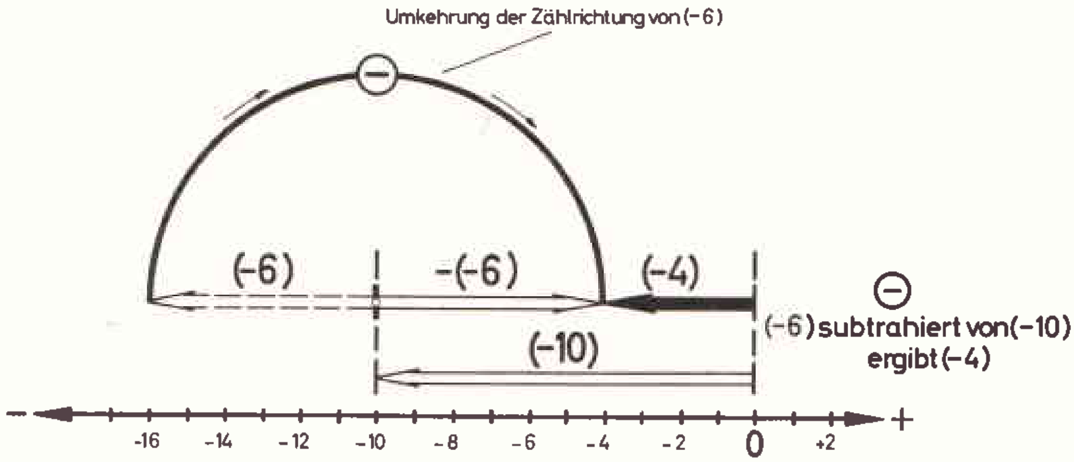


Abb. 7

$$(-5) - (-7) = \underline{\underline{(+2)}}. \qquad (s.\ Abb.\ 8)$$

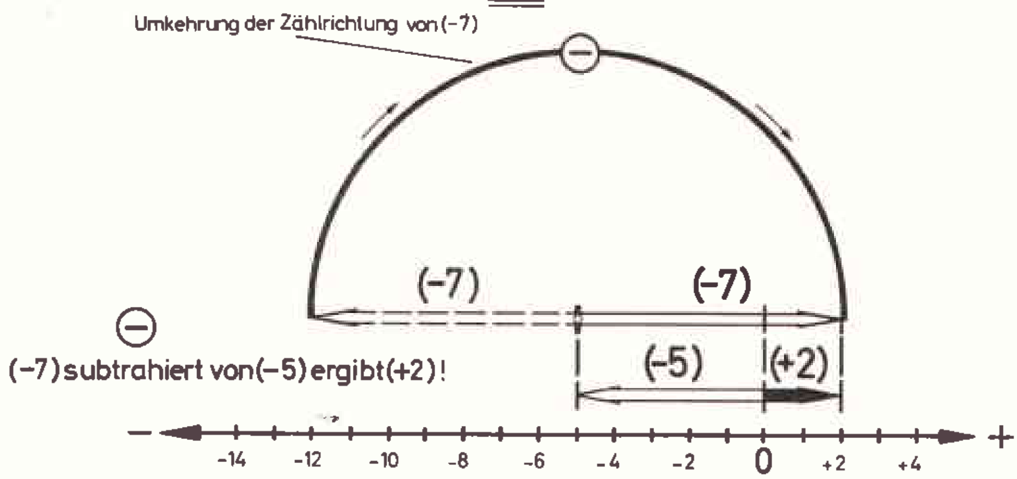


Abb. 8

Für die **Multiplikation** gilt:

$$(+1)\cdot(+1) = \underline{\underline{(+1)}} \qquad (-1)\cdot(+1) = \underline{\underline{(-1)}}$$

$$(-1)\cdot(-1) = \underline{\underline{(+1)}} \qquad (+1)\cdot(-1) = \underline{\underline{(-1)}}$$

$$(+3)\cdot(+4) = \underline{\underline{(+12)}} \qquad (+3)\cdot(-4) = \underline{\underline{(-12)}}$$

$$(+4)\cdot(+3) = \underline{\underline{(+12)}} \qquad (-4)\cdot(+3) = \underline{\underline{(-12)}}$$

$$(-3)\cdot(-4) = \underline{\underline{(+12)}} \qquad (+4)\cdot(-3) = \underline{\underline{(-12)}}$$

$$(-4)\cdot(-3) = \underline{\underline{(+12)}} \qquad (-3)\cdot(+4) = \underline{\underline{(-12)}}$$

Für die **Division** gilt:

$$(+1):(+1) = \underline{\underline{(+1)}} \qquad (-1):(+1) = \underline{\underline{(-1)}}$$

$$(-1):(-1) = \underline{\underline{(+1)}} \qquad (+1):(-1) = \underline{\underline{(-1)}}$$

$$(+12):(+3) = \underline{\underline{(+4)}} \qquad (+12):(-3) = \underline{\underline{(-4)}}$$

$$(-12):(-3) = \underline{\underline{(+4)}} \qquad (-12):(+3) = \underline{\underline{(-4)}}$$

$$(+12):(+4) = \underline{\underline{(+3)}} \qquad (+12):(-4) = \underline{\underline{(-3)}}$$

$$(-12):(-4) = \underline{\underline{(+3)}} \qquad (-12):(+4) = \underline{\underline{(-3)}}$$

Alle **Zahlen ohne Vorzeichen** sind **positive Zahlen!** Bei positivem Ergebnis einer Rechenaufgabe wird daher das Pluszeichen nicht mitgeschrieben, also:

$$(+\,4) = +\,4 = \underline{\underline{4}}\,.$$

1. 5. Dreisatzrechnen

Die Dreisatzrechnung, auch **Schlußrechnung** genannt, ist eine einfache, volkstümliche Rechenart, mit der sich viele praktische Aufgaben leicht und sicher lösen lassen.

Der Dreisatz eignet sich für **alle Aufgaben,** in denen **zwei oder drei Größen in einem bestimmten Verhältnis** zueinander stehen, wie z. B. die Anzahl der **Verbraucher zum Verbrauch, Stückzahlen zu Preisen,** Arbeit und **Arbeitszeit zur geleisteten Arbeit.** Aus diesem in der Aufgabe gegebenen Verhältnis von zwei bzw. drei Größen kann dann **auf andere Größen geschlossen** werden. Das geht folgendermaßen vor sich:

Beispiel 1

5 Handwerker mit einem gleichen Stundenlohn verdienen in einer bestimmten Zeit 75 DM.
Wieviel DM verdienen 4 Handwerker in der gleichen Zeit bei dem gleichen Stundenlohn?
Im **ersten Satz** wird das gegebene Verhältnis so niedergeschrieben, daß die Größe, die berechnet werden soll, rechts steht:

5 Handwerker .... 75 DM.

Im **zweiten Satz** wird das Verhältnis für eine Einheit errechnet, also für **einen** Handwerker:

1 Handwerker .... $\frac{75}{5}$ DM.

Im **dritten Satz** wird das gesuchte Verhältnis berechnet:

4 Handwerker .... $\frac{75 \cdot 4}{5} = \underline{\underline{60\,\text{DM}}}$.

Beim zweiten und dritten Satz ist darauf zu achten, ob es sich um ein gerades Verhältnis handelt, wie im Beispiel 1, oder um ein umgekehrtes Verhältnis (vgl. Beispiel 2).

Bei einem **geraden Verhältnis** (Beispiel 1) muß **links und rechts** die **gleiche Rechnung** vorgenommen werden. Wenn links etwas vermindert wird, im Beispiel statt **fünf** nur **ein** Handwerker, muß auch rechts geteilt werden. Bei einem **umgekehrten Verhältnis**, bei dem z. B. eine Verringerung der Anzahl der Arbeiter eine entsprechende Vergrößerung der benötigten Arbeitszeit für eine Arbeit bedingt, muß man die **rechte Größe multiplizieren** und die **linke Größe dividieren**:

Beispiel 2

5 Arbeiter verrichten einen bestimmten Auftrag in 15 Stunden.
Wie lange brauchen 3 Arbeiter zu dem gleichen Auftrag?

5 Arbeiter .... 15 Stunden;

1 Arbeiter .... 15 · 5 Stunden;

3 Arbeiter .... $\frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot 5}{\underset{1}{\cancel{3}}} = \underline{\underline{25\,\text{Stunden}}}$.

Werden **mehr als zwei Größen** beim Dreisatzrechnen eingesetzt, dann ist das Rechnen wohl etwas schwieriger; es kann aber vereinfacht werden, wenn beim Rechnen **drei Sätze folgerichtig gesprochen** werden:

Beispiel 3

10 Handwerker benötigen **5 Tage**, um **200 m Kabel** zu verlegen.
Wieviel Zeit benötigen **4 Handwerker**, um **300 m Kabel** zu verlegen?

1. Satz ⟶ 10 Handwerker ...... 200 m ... 5 Tage;

2. Satz ⟶
- 1 Handwerker ...... 200 m ... $5 \cdot 10$ Tage,
- 1 Handwerker ...... 1 m ... $\frac{5 \cdot 10}{200}$ Tage;

3. Satz ⟶
- 4 Handwerker ...... 1 m ... $\frac{5 \cdot 10}{200 \cdot 4}$ Tage,
- 4 Handwerker ...... 300 m ... $\frac{5 \cdot 10 \cdot 300}{200 \cdot 4}$ Tage;

$$\frac{5 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{300}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{200}} \cdot 4} = \frac{75}{4} = \underline{\underline{18\frac{3}{4}\,\text{Tage}}}.$$

1. 6. Prozentrechnen*)

Dem Dreisatz verwandt ist das Prozentrechnen. Es handelt sich ebenfalls um das Feststellen von Zahlenverhältnissen. Als **Vergleichszahl**, auf die das Verhältnis **bezogen** wird, dient die **Zahl 100**. Der Zweck dieser Rechenart ist, für verschiedene Verhältnisse gleichwertige Vergleichszahlen zu erhalten.

Beispiel

A. berichtet, er verdiene jetzt monatlich 120,— DM mehr als bisher. Sein Kollege B. dagegen sagt, er bekäme nur 75,— DM mehr. Beide Aussagen sind wenig aufschlußreich, wenn man wissen möchte, wessen Gehalt im Verhältnis mehr erhöht wurde. Hat A. bisher 1000,— DM verdient und B. nur 600,— DM, dann kann für beide Fälle der Prozentsatz der Steigerung ausgerechnet werden.

Fall A. Grundwert 1000,— DM Gehalt ..... entsprechen $100\,\%$;

1,— DM Gehaltszulage entspricht $\frac{100}{1000}\,\% = 0{,}1\,\%$;

Prozentwert 120,— DM Gehaltszulage entsprechen $120 \cdot \frac{100}{1000}\,\% = \underline{\underline{12{,}0\,\%}}$. Prozentsatz

Fall B. 600,— DM Gehalt ..... entsprechen $100\,\%$;

1,— DM Gehaltszulage entspricht $\frac{100}{600}\,\% = 0{,}166..\,\%$;

75,— DM Gehaltszulage entsprechen $75 \cdot \frac{100}{600}\,\% = \underline{\underline{12{,}5\,\%}}$.

Im Vergleich zu den ursprünglichen Gehältern ist also die Gehaltserhöhung im Fall B. günstiger als im Fall A. Das läßt sich aus den Prozentzahlen ohne weiteres ablesen; aus den absoluten Zahlen war das nicht erkennbar.

Grundbegriffe des Prozentrechnens

a) **Grundwert**

Der Grundwert ist stets benannt (z. B. DM, kg, m). Er **entspricht 100 Hundertsteln,** also **dem Ganzen** oder eben $100\,\%$ ($\%$ = mathematisches Zeichen für »Prozent«, »Hundertstel«).

b) **Prozentsatz**

Der Prozentsatz ist stets die Angabe **eines Teiles von 100**. Er wird in Hundertsteln des Grundwertes angegeben und sagt aus, wieviel Teile aus diesen 100 Teilen zu berechnen sind bzw. zur Betrachtung anstehen.

c) **Prozentwert**

Der Prozentwert ist ein Anteil des Ganzen, des **Grundwertes**. Er ist stets eine benannte Zahl (DM, kg, m). Prozentsatz und Prozentwert entsprechen einander.

Für das Wort »entsprechen« darf kein Gleichheitszeichen gesetzt werden. Dafür wird das mathematische Zeichen »$\triangleq$« verwendet, das »entspricht« bzw. »entsprechen« bedeutet.

Jeder der drei Grundbegriffe (Grundwert, Prozentsatz, Prozentwert) kann in einer Prozentrechnung als das gesuchte Ergebnis auftreten.

*) »Prozent« ($\%$), auch verschiedentlich abgekürzt »v. H.«, vom lateinischen »pro centum« = »für/auf/vom Hundert« = »Hundertstel«.

Eine Schwierigkeit bei der Prozentrechnung besteht darin, den **richtigen Grundwert** einzusetzen.

Beispiel

Eine Fabrik fertigt insgesamt monatlich 1000 Werkstücke; 50 Stück davon sind Ausschuß. Es sind zu berechnen

a) der Ausschuß aus der Gesamtfertigung in %,
b) der Ausschuß in % der einwandfreien Werkstücke.

Lösungen

zu a) $$\frac{50\cdot 100}{1000} = \underline{\underline{5\,\%}};$$

zu b) $$\frac{50\cdot 100}{950} = \underline{\underline{5{,}263\,\%}}.$$

Das Prozentrechnen kann also, je nach der Wahl des Grundwertes, zu unterschiedlichen Ergebnissen führen. Es gilt daher, den Sinn der jeweiligen Aufgabe richtig zu erfassen und den Grundwert im Sinne der Aufgabe zu wählen.

Bei der **Zinsrechnung** muß die **Zahl der Jahre** zusätzlich erfaßt werden, weil der Prozentsatz auf die **jährlich aufkommenden Zinsen** Bezug hat.

Wenn an Stelle von »Grundwert« der Begriff **»Kapital«** und von »Prozentwert« der Begriff **»Zinsen«** eingesetzt werden, lautet die **Formel für die Zinsrechnung**:

Beispiel

Ein Kapital von 5000,— DM wird auf die Dauer von 12 Jahren zu einem Zinssatz von $6\frac{2}{3}$ % angelegt. Wie groß sind die Zinsen (ohne Berücksichtigung der Zinseszinsen)?

$$\frac{5000\cdot 12\cdot 6\frac{2}{3}}{100} = \frac{\overset{50}{\cancel{5000}}\cdot \overset{4}{\cancel{12}}\cdot 20}{\underset{1}{\cancel{100}}\cdot \underset{1}{\cancel{3}}} = \underline{\underline{4000,\text{— DM}}}.$$

1. 7. Fragen zu Abschnitt 1 (Die ersten vier Grundrechenarten)

1. Nenne die Fremdwörter (lateinische Ausdrücke) für die ersten vier Grundrechenarten!
2. Wie nennt man das Ergebnis beim Zusammenzählen?
3. Bei welcher Grundrechenart ergibt sich als Ergebnis die Differenz?
4. Ist eine Reihenfolge der Rechenoperationen zu beachten, wenn in einer Aufgabe Multiplizieren und Dividieren — ohne gesetzte Klammern — vorkommen?
5. Nenne die Umkehrung der Multiplikation!
6. Wie gibt man die Größe von Bruchstücken der Zahleneinheit an?
7. Was gibt der Zähler und was gibt der Nenner eines Bruches an?
8. Wie groß ist der Wert eines Bruches, bei dem Zähler und Nenner gleich groß sind?
9. Erkläre den Unterschied zwischen einem echten und einem unechten Bruch!
10. Was versteht man unter einer gemischten Zahl, und wie wird sie geschrieben?
11. Was gilt für die Addition und die Subtraktion von gleichnamigen Brüchen?
12. Wie erweitert man einen Bruch?
13. Wie können ungleichnamige Brüche addiert werden?
14. Gib eine Methode an für die Subtraktion ungleichnamiger Brüche!
15. Erkläre den Ausdruck »Dezimalbruch«!
16. Was ist ein endlicher Dezimalbruch?
17. Was ist ein unendlicher, periodischer Dezimalbruch?
18. Was ist ein unendlicher, nicht periodischer Dezimalbruch? Welche bekannte Zahlengröße rechnet zu dieser Dezimalbruchgruppe?
19. Welche wichtige Regel gilt für die Reihenfolge von Rechenoperationen?
20. Was versteht man unter relativen Zahlen?
21. Wann ergibt sich bei der Multiplikation von zwei Faktoren ein negatives Produkt?
22. Erkläre die drei Sätze der Schlußrechnung (Dreisatzrechnung)!
23. Nenne die Grundbegriffe des Prozentrechnens!
24. Auf welche Zahl wird das Verhältnis beim Prozentrechnen bezogen?

2. Die höheren Grundrechenarten

Neben den vier einfachen Grundrechenarten (Addieren — Subtrahieren — Multiplizieren — Dividieren) gibt es noch andere Rechenarten, die man die höheren Grundrechenarten nennt.

Es sind dies das **Potenzieren**, das **Radizieren** und das **Logarithmieren.** Diese drei Rechenverfahren bilden ein System, wobei die beiden letztgenannten die Umkehrung des ersten Verfahrens sind.

2. 1. Potenzieren (fünfte Grundrechenart)

Das Potenzieren als fünfte Grundrechenart ist eine **vereinfachte Form der vielfachen Multiplikation** gleicher Größen. Für die umständliche Schreibweise

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = \underline{\underline{243}}$$

schreibt man die Potenz $3^5 = \underline{\underline{243}}$, sprich: »3 hoch 5«.

Die Zahl **3** wird als die **Basis** (oder Grundzahl) bezeichnet, die Zahl **5** ist der **Exponent** (oder Hochzahl), **243** ist das **Ergebnis.** Der Exponent gibt also an, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist:

$$3^2 = 3 \cdot 3 = \underline{\underline{9}},$$
$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = \underline{\underline{64}},$$
$$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = \underline{\underline{(+4)}},$$
$$(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = \underline{\underline{(-64)}}.$$

Potenzen mit **positivem Vorzeichen** haben **immer** ein **positives Ergebnis.**
Negative Potenzen mit **geradem Exponenten** haben ebenfalls ein **positives Ergebnis.**
Negative Potenzen mit **ungeradem Exponenten** führen immer zu einem **negativen Ergebnis.**

2. 1. 1. Addition und Subtraktion von Potenzen

Im allgemeinen müssen bei der Addition und Subtraktion die **Werte der einzelnen Potenzen ermittelt** und diese **dann addiert oder** voneinander **subtrahiert** werden.

Beispiele

$$3^2 + 2^3 = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 2 = 9 + 8 = \underline{\underline{17}};$$
$$3^2 - 2^3 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 9 - 8 = \underline{\underline{1}}.$$

Stimmen Potenzen in **Basis** und **Exponent überein,** dann können sie als gleiche »Einheit« angesehen und **unmittelbar** addiert und subtrahiert werden.

Beispiel

$$2 \cdot 2^3 + 2^3 = 2 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^3 = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = \underline{\underline{24}}.$$

Hier ist 2^3 die »Einheit«, wie Ampere, Volt, Ohm, m; also ist der Zahlenansatz des Beispiels vergleichbar mit

$$2\ \text{Ohm} + 1\ \text{Ohm} = \underline{\underline{3\ \text{Ohm}}}.$$

Der **Exponent** einer Potenz kann **verändert** werden, indem man **Faktoren** aus der Potenz **herausnimmt** und als Faktoren zur Potenz schreibt.

Beispiel

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3 \cdot 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3^3 = 3^2 \cdot 3^3 \text{ usw..}$$

Diese Methode wird angewandt, wenn Potenzen mit unterschiedlichen Exponenten addiert oder voneinander subtrahiert werden sollen. Zu diesem Zweck werden die Exponenten der Potenzen durch Herausnehmen von Faktoren aus den Potenzen gleichgemacht.

Beispiel

$$\begin{aligned} & 1{,}4 \cdot 10^{14} + 22{,}0 \cdot 10^{12} \\ = {} & 1{,}4 \cdot 10 \cdot 10^{13} + 2{,}2 \cdot 10 \cdot 10^{12} \\ = {} & 14{,}0 \cdot 10^{13} + 2{,}2 \cdot 10^{13} \\ = {} & \underline{\underline{16{,}2 \cdot 10^{13}}}. \end{aligned}$$

Diese Methode des Exponentenangleichens eignet sich natürlich nur dann, wenn die Exponenten annähernd gleich groß sind.

2. 1. 2. Multiplikation und Division von Potenzen

> Potenzen mit **gleicher Basis** werden **multipliziert,** indem man die **Exponenten addiert.** Sie werden ***dividiert,*** indem man die ***Exponenten*** voneinander ***subtrahiert.***

Beispiele

Multiplizieren von Potenzen mit positivem Exponenten

	mit Hilfe der Potenzrechnung	 Multiplikation
$3^3 \cdot 3^2$ $= \underline{\underline{243}}$	$= 3^{3+2}$ $= 3^5$	$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ $= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$3 \cdot 2^3 \cdot 4 \cdot 2^3$ $= \underline{\underline{768}}$	$= 3 \cdot 4 \cdot 2^{3+3}$ $= 12 \cdot 2^6$	$= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ $= 12 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$2 \cdot 10^2 \cdot 3 \cdot 10^2$ $= \underline{\underline{60\,000}}$	$= 2 \cdot 3 \cdot 10^{2+2}$ $= 6 \cdot 10^4$	$= 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 10$ $= 6 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

Dividieren von Potenzen mit positivem Exponenten

	mit Hilfe der Potenzrechnung	 Division
$4^4 : 4^2$ $= \underline{\underline{16}}$	$= 4^{4-2}$ $= 4^2$	$= \frac{4 \cdot 4 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{4}}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}$ $= 4 \cdot 4$
$(3 \cdot 2^3) : (4 \cdot 2^2)$ $= \underline{\underline{1{,}5}}$	$= \frac{3}{4} \cdot 2^{3-2}$ $= 0{,}75 \cdot 2^1$ $= 0{,}75 \cdot 2$	$= \frac{3 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}$ $= \frac{3}{2}$
$(1{,}5 \cdot 10^4) : (0{,}5 \cdot 10^2)$ $= \underline{\underline{300}}$	$= \frac{1{,}5}{0{,}5} \cdot 10^{4-2}$ $= 3 \cdot 10^2$	$= \frac{1{,}5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}{0{,}5 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}$ $= 3 \cdot 10 \cdot 10$

In den bisherigen Beispielen wurde nur mit Potenzen gerechnet, die einen positiven Exponenten gehabt haben. Die **Bedeutung** einer Potenz mit **negativem Exponenten** soll mit folgenden Beispielen erläutert werden.

Es ist $$\frac{4^2}{4^4} = \frac{\overset{1 \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}}{4 \cdot 4 \cdot \underset{1 \cdot 1}{\cancel{4} \cdot \cancel{4}}} = \frac{1}{4 \cdot 4} = \underline{\underline{\frac{1}{4^2}}}$$

oder — weil Potenzen dividiert werden, indem ihre Exponenten subtrahiert werden —

$$\frac{4^2}{4^4} = 4^2 : 4^4 = 4^{2-4} = \underline{\underline{4^{-2}}}.$$

Somit ist also $$\boxed{\frac{1}{4^2} = 4^{-2}}$$

Es ist aber auch $$1 : \frac{1}{4^2} = 1 : 4^{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{4^{-2}}}}$$

oder — weil ganze Zahlen durch Brüche dividiert werden, indem sie mit dem Kehrwert des Bruches zu multiplizieren sind —

$$1 : \frac{1}{4^2} = 1 \cdot \frac{4^2}{1} = \underline{\underline{4^2}}.$$

Somit ist also $$\boxed{\frac{1}{4^{-2}} = 4^2}$$

Wird eine **Potenz aus** dem **Nenner** eines Bruches **in** dessen **Zähler** oder aus dem Zähler in den Nenner gesetzt, dann ist das **Vorzeichen des Exponenten** zu **ändern.**

Eine Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem Kehrwert dieser Potenz mit positivem Exponenten $\left(a^{-n} = \frac{1}{a^n}\right)$.

Umgekehrt ist eine Potenz mit positivem Exponenten gleich dem Kehrwert dieser Potenz mit negativem Exponenten $\left(b^m = \frac{1}{b^{-m}}\right)$.

Beispiele

Rechnen mit Potenzen mit negativem Exponenten

	unter Anwendung der	
	Potenzrechnung	Multiplikation oder Division
$3^2 + 2^{-2}$ $= \underline{\underline{9\frac{1}{4}}}$	$= 3^2 + \frac{1}{2^2}$ $= 9 + \frac{1}{4}$	$= 3 \cdot 3 + \frac{1}{2 \cdot 2}$ $= 9 + \frac{1}{4}$
$4^2 - 2^{-3}$ $= \underline{\underline{15\frac{7}{8}}}$	$= 4^2 - \frac{1}{2^3}$ $= 16 - \frac{1}{8}$	$= 4 \cdot 4 - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2}$ $= 16 - \frac{1}{8}$
$3^3 \cdot 3^{-2}$ $= \underline{\underline{3}}$	$= 3^{3+(-2)}$ oder $\frac{3^3}{3^2}$ $= 3^{3-2}$ $= 3^1$	$= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3 \cdot 3}$ $= 27 \cdot \frac{1}{9}$
$4^2 : 2^{-2}$ $= \underline{\underline{64}}$	$= 4^2 : \frac{1}{2^2}$ $= 4^2 \cdot 2^2$ $= (4 \cdot 2)^2$ $= 8^2$	$= 4 \cdot 4 : \frac{1}{2 \cdot 2}$ $= 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2$ $= 16 \cdot 4$
$1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$ $= \underline{\underline{0{,}3}}$	$= 1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{3+(-4)}$ $= 3 \cdot 10^{3-4}$ $= 3 \cdot 10^{-1}$ $= \frac{3}{10}$	$= \frac{1{,}5 \cdot 2 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}{10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}$ $= \frac{3}{10}$

Aus der Division von Potenzen ergeben sich noch zwei Besonderheiten, die zu beachten sind.

$$\frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = \underline{\underline{5^1}};$$

$$\frac{5^3}{5^2} = \frac{5 \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{1}{\cancel{5}}} = \underline{\underline{5}};$$

$$\boxed{5^1 = 5}$$

| Eine Potenz, die »1« zum Exponenten hat, ist immer gleich ihrer Basis ($a^1 = a$).

$$\frac{6^5}{6^5} = 6^{5-5} = \underline{\underline{6^0}};$$

$$\frac{6^5}{6^5} = \frac{\overset{1}{\cancel{6}} \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \cdot \overset{1}{\cancel{6}} \cdot \overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}} \cdot \underset{1}{\cancel{6}}} = \underline{\underline{1}};$$

$$\boxed{6^0 = 1}$$

| Eine Potenz, die »0« zum Exponenten hat, ist immer gleich »1« ($b^0 = 1$).

Beispiel

Rechnen mit Potenzen mit negativem Exponenten

	unter Anwendung der Potenzrechnung	unter Anwendung der Multiplikation oder Division
$2{,}8 \cdot 7^6 \cdot 5{,}4 \cdot 7^{-6}$	$= 2{,}8 \cdot 5{,}4 \cdot 7^{6+(-6)}$	$= \frac{2{,}8 \cdot 5{,}4 \cdot \cancel{7^6}}{\cancel{7^6}}$
	$= 15{,}12 \cdot 7^{6-6}$	
	$= 15{,}12 \cdot 7^0$	$= 2{,}8 \cdot 5{,}4$
$= \underline{\underline{15{,}12}}$	$= 15{,}12 \cdot 1$	

2. 1. 3. Zehnerpotenzen

Von besonderer Bedeutung sind die Zehnerpotenzen (Potenzen mit der Basis 10), die häufig zur **vereinfachten Schreibweise sehr großer und kleiner Werte** herangezogen werden. Im Sprachgebrauch werden diese Potenzen durch besondere Abkürzungen gekennzeichnet.

Potenzform		Zahlenwerte in Ziffernfolge	Benennung	Beispiele
$1 \cdot 10^{12}$	=	1 000 000 000 000	Tera-(T)	
$1 \cdot 10^{9}$	=	1 000 000 000	Giga-(G)	Gigawatt (GW)
$1 \cdot 10^{6}$	=	1 000 000	Mega-(M)	Megohm (M Ω)
$1 \cdot 10^{5}$	=	100 000		
$1 \cdot 10^{4}$	=	10 000		
$1 \cdot 10^{3}$	=	1 000	Kilo-(k)	Kilohertz (kHz)
$1 \cdot 10^{2}$	=	100	Hekto-(h)	Hektoliter (hl)
$1 \cdot 10^{1}$	=	10	Deka-(D)	Dekagramm (Dg)
$1 \cdot 10^{0}$	=	1		
$1 \cdot 10^{-1}$	=	0,1	Dezi-(d)	Dezimeter (dm)
$1 \cdot 10^{-2}$	=	0,01	Zenti-(c)	Zentimeter (cm)
$1 \cdot 10^{-3}$	=	0,001	Milli-(m)	Millimeter (mm)
$1 \cdot 10^{-4}$	=	0,0001		
$1 \cdot 10^{-5}$	=	0,000 01		
$1 \cdot 10^{-6}$	=	0,000 001	Mikro-(μ)	Mikrofarad (μF)
$1 \cdot 10^{-9}$	=	0,000 000 001	Nano-(n)	Nanofarad (nF)
$1 \cdot 10^{-12}$	=	0,000 000 000 001	Piko-(p)	Pikofarad (pF)

Tabelle 1 Schreibweise und Benennung der Zehnerpotenzen

Sollen Zwischenwerte dargestellt werden, wird eine Zehnerpotenz mit einem entsprechenden Faktor multipliziert.

Beispiele

$1{,}0 \cdot 10^2 = \underline{\underline{100}};$ $\quad 7{,}0 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}007}};$

$3{,}7 \cdot 10^2 = \underline{\underline{370}};$ $\quad 0{,}8 \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{0{,}008}};$

$4{,}6 \cdot 10^3 = \underline{\underline{4600}};$ $\quad 1{,}5 \cdot 10^{-2} = \underline{\underline{0{,}015}}.$

Eine **Zahl** wird **mit** einer **Zehnerpotenz multipliziert,** indem das Komma der Zahl um so viele Stellen verschoben wird, wie der Exponent angibt.
Ist der **Exponent positiv,** dann wird das **Komma nach rechts,**
ist der **Exponent negativ,** dann wird das **Komma nach links** verschoben.

2. 1. 4. Multiplikation und Division von Potenzen unterschiedlicher Basen

Sind bei den Potenzen unterschiedlicher Basen die **Exponenten** ebenfalls **unterschiedlich,** dann muß das Ergebnis durch Bestimmung der Werte jeder Potenz für sich ermittelt werden.

Beispiele

$$2^2 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 27 = \underline{\underline{108}};$$

$$\frac{2^2}{3^3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{4}{\underline{\underline{27}}}.$$

Sind dagegen die **Exponenten gleich,** dann läßt sich das Ergebnis durch **Zusammenfassen der Basen** als Faktoren oder in Bruchform einfacher ermitteln.

Beispiele

$$\begin{aligned} 4^3 \cdot 2^3 &= (4 \cdot 2)^3 \\ &= 8^3 \\ &= \underline{\underline{512}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{4^3}{2^3} &= \left(\frac{4}{2}\right)^3 \\ &= 2^3 \\ &= \underline{\underline{8}}. \end{aligned}$$

Potenzen mit **unterschiedlichen Basen,** aber mit **gleichem Exponenten,** werden **multipliziert** bzw. dividiert, indem man die **Basen multipliziert** bzw. dividiert und den **Exponenten unverändert** läßt.

2. 2. Radizieren (Wurzelziehen) (sechste Grundrechenart)

Zu den bisher behandelten Grundrechenarten gibt es jeweils eine Umkehrung. Bei der Addition ist dies die Subtraktion, bei der Multiplikation die Division.

Zum Unterschied gegenüber den ersten vier Grundrechenarten gibt es **zum Potenzieren zwei Umkehrungen,** das **Radizieren** (Wurzelziehen) und das **Logarithmieren.**

Nachstehend soll zunächst die erste Umkehrung, das Radizieren, behandelt werden.

Wenn $3^2 = 9$ ist, kann umgekehrt aus dem Ergebnis 9 und dem Exponenten 2 durch das **Wurzelziehen** die **Basis** (Wurzelwert, abgekürzt »Wurzel«) **ermittelt** werden. Dabei wird die Absicht des Wurzelziehens ausgedrückt, indem das **Wurzelzeichen** ($\sqrt{}$) vor die zu radizierende Zahl gesetzt wird.

Dieses Zeichen ist aus dem Buchstaben »r«, dem Anfangsbuchstaben des lateinischen Wortes »radix« (= Wurzel), abgeleitet worden. Auf den vorderen Absatz des Zeichens wird die Zahl des Wurzelexponenten geschrieben, der hintere Absatz wird jeweils soweit nach rechts ausgedehnt, daß der zu radizierende Ausdruck voll davon überdacht wird. Um einen Irrtum auszuschließen, kann die überdachende horizontale Linie an ihrem Ende noch mit einem vertikal angesetzten Abschlußstrich versehen werden.

Man schreibt also

$$\sqrt[2]{9} = \sqrt{9}^{*)} = \underline{\underline{3}}$$

und liest den Zahlenansatz folgendermaßen

»Die 2. Wurzel aus 9 ist gleich 3« oder
»Die Quadratwurzel aus 9 ist gleich 3« oder noch einfacher
»Die Wurzel aus 9 ist gleich 3«.

Wir merken uns aus dem vorliegenden Beispiel:

2 ist der **Wurzelexponent,**
9 ist der **Radikand,**
3 ist der **Wurzelwert** bzw. die **Wurzel.**

Der erforderliche Rechengang, um aus einer mehr als zweistelligen Quadratzahl die Wurzel zu ziehen, soll in einem einfachen Beispiel gezeigt werden. Zum leichteren Verständnis wird dazu die Abb. 9 verwendet. Hier sind zwei gleich große Quadrate mit den Seitenlängen

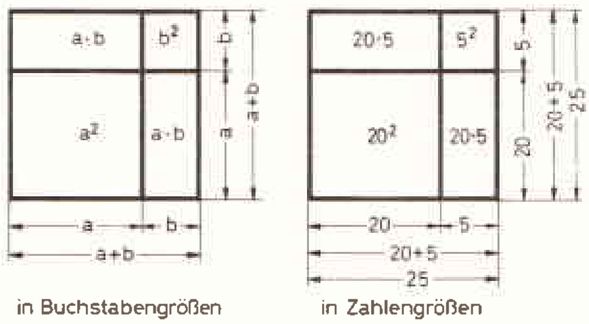
allgemein ausgedrückt $(a + b)$ bzw.
als Zahlenbeispiel $(20 + 5) = \underline{\underline{25}}$

dargestellt.

Abb. 9

Zeichnerische Darstellung der Formelgleichungen

$$(a + b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$
$$(20 + 5)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2$$



Soll das Potenzieren umgekehrt, also radiziert werden, dann muß auch umgekehrt gelten:

in der allgemeinen Form

$$\sqrt{a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2} = \sqrt{(a + b)^2} = \underline{\underline{a + b}},$$

als Zahlenbeispiel

$$\sqrt{20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 5 + 5^2} = \sqrt{(20 + 5)^2} = \sqrt{25^2} = \underline{\underline{25}}.$$

Die Quadratzahl enthält also den Summenausdruck $(a^2 + 2ab + b^2)$, und es gilt nun, die Größen a und b zu ermitteln, die in der Summe $(a + b)$ den Wurzelwert darstellen.

Das Prinzip des Wurzelziehens soll an folgenden Beispielen erklärt werden.

*) Bei der »Quadrat«-Wurzel (= 2. Wurzel) kann der Wurzelexponent 2 weggelassen werden, um die Schreibweise dieser am meisten vorkommenden Wurzelform zu vereinfachen.

Beispiel 1 $\sqrt{625} = ?$

Formelwert	Auflösung der Wurzel	Hinweise für die Berechnung	Resultat (Wurzelwert) in Zahlen	Resultat (Wurzelwert) in Buchstaben
$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$	$\sqrt{625}$	Zuerst ist die größtmögliche Quadratzahl zu suchen, die in dem Radikanden enthalten ist und die nach Abzug von ihm noch einen so großen Restbetrag übrigläßt, daß aus diesem noch die Formelglieder 2ab und b^2 gewonnen werden können.		
$-a^2$	-400 Rest 225	Die größtmögliche Quadratzahl ($= a^2$) ist in vorliegender Aufgabe gleich 400 ($= 20^2$). Zunächst wird also 400 von 625 abgezogen (Rest 225) und in der Resultatspalte (rechts) die Größe 20 ($= a$) vermerkt.	20	a
		In dem Rest 225 sind nun noch 2ab und b^2 enthalten. Jetzt wird festgestellt, wie oft der Wert $2a = 40$ in 225 enthalten ist, nämlich 5mal (bzw. b mal).		
$-2ab$	-200 Rest 25	Vom Rest wird also jetzt $2ab = 2 \cdot 20 \cdot 5 = 200$ abgezogen.	+	+
$-b^2$	-25 Rest 00	Es bleibt als neuer Rest 25 übrig. War die bisherige Rechnung richtig und soll die Wurzel aufgehen, dann muß dieser Rest (25) gleich b^2 sein. Das ist hier der Fall. Denn $b^2 = 5^2 = 25$, und der nunmehr verbleibende Rest wird damit gleich 0!	5	b
		Der gesuchte Wurzelwert ist also $(a + b) = (20 + 5) = 25$.	25	a + b

Der Gang der vorstehenden Wurzelberechnung stellt sich zusammengefaßt folgendermaßen dar:

$$\begin{array}{rl}
\sqrt{625} & = \quad 20 + 5 = \underline{\underline{25}}. \\
-400 & \\
\hline
225 & : \ (2 \cdot 20) = 5 \\
-200 & - \ 2 \cdot 20 \cdot 5 \\
\hline
25 & : \ 5 \qquad = 5 \\
-25 & - \ 5^2 \\
\hline
00 &
\end{array}$$

Abb. 9 (rechts) zeigt anschaulich den gleichen Vorgang des soeben durchgeführten Wurzelziehens in Bildform.

Auch hier wird die Fläche $25^2 = (20 + 5)^2 = 625$ in die Formelsumme

$$a^2 (= 20^2 = 400) + 2ab (= 2 \cdot 20 \cdot 5 = 200) + b^2 (= 5^2 = 25)$$

aufgeteilt und damit die Seitenlänge $(a + b) = 25$ des Quadrates 625 als die gesuchte Wurzel gefunden.

Nicht immer ist jedoch der Wert des Radikanden klein und überschaubar. Deshalb wird in der Praxis folgender Rechengang angewendet, der auf dem vorstehenden Verfahren beruht.

Zunächst ist der **Radikand in 2er-Zifferngruppen** zu **unterteilen,** und zwar **von** dem vorhandenen bzw. gedachten **Kommazeichen ausgehend** nach links und rechts fortlaufend.

Jede vollständige oder unvollständige **2er-Zifferngruppe** ergibt dazu **im Resultat** (Wurzelwert) **eine Ziffernstelle.**

Beispiel	Radikand	Gruppenaufteilung	Zahl der 2er-Gruppen = Stellenzahl der Wurzel	Wurzelwert
1	625	6 | 25	2	25
2	133 225	13 | 32 | 25	3	365
3	380,25	3 | 80,25	3	19,5
4	2 263,8564	22 | 63,85 | 64	4	47,58

In den Beispielen 2 bis 4 wird an verschiedenen, mehrstelligen Radikanden eine für die Praxis dienliche Methode gezeigt. Dabei sind die Zwischenrechnungen für die stufenweisen Abzüge noch mehr zusammengefaßt und vereinfacht worden.

Beispiel 2 $\sqrt{133\,225} = ?$

Auflösung der Wurzel	Zwischenrechnungen und Ergebnis	Hinweise für die Berechnung
$\sqrt{13\mid 32\mid 25}$	Ziffernstelle ① ② ③ = 3 6 5 I II III	Die Gruppeneinteilung des Radikanden zeigt, daß die **Wurzel dreiziffrig ist!**
− 9 (4)		I. Es wird die in der ersten Gruppe (**13**) enthaltene größte Quadratzahl gesucht ($9 = 3^2$, entspricht a^2). 9 wird von 13 abgezogen, dem Rest 4 wird die nächste 2er-Gruppe (32) des Radikanden zugesetzt. Man erhält 432.
4 | 3 2	$: 20 \cdot 3 + (6) = (6)$ $: \quad 66 \quad = (6)$	II. Diese Zahl **432** wird durch den 20fachen Wert der ersten Wurzelziffer (3), die um den zu erwartenden größtmöglichen Teilungswert (hier 6) zu erhöhen ist, geteilt.
− 3 9 6 (3 6)	$- (66 \cdot 6)$	Das Produkt $[(20 \cdot 3 + 6) \cdot 6 = 66 \cdot 6 = 396]$ wird wie beim Dividieren von 432 abgezogen. Es verbleibt ein Rest von 36, dem die dritte 2er-Gruppe (25) des Radikanden zugesetzt wird.
3 6 | 2 5	$: 20 \cdot 36 + (5) = (5)$ $: \quad 725 \quad = (5)$	III. Diese neue Zahl **3625** wird wieder durch den 20fachen Wert der ersten zwei Ziffern (36) des Wurzelwertes, erhöht durch den zu erwartenden größtmöglichen Teilungswert (hier 5), geteilt.
− 36 25 00 00	$- (725 \cdot 5)$	Das Produkt $(20 \cdot 36 + 5) \cdot 5 = 725 \cdot 5 = 3625$ wird von der neuen Zahl **3625** abgezogen. Da kein Rest verbleibt, ist die Wurzel aufgegangen. Die letzte (dritte) Wurzelziffer ist also 5. **Die Wurzel lautet 365.**

Zusammengefaßt wird die vorstehende Wurzelberechnung geschrieben:

$$\begin{array}{lll}
\sqrt{13|32|25} & = 300 + 60 + 5 & = \underline{\underline{365}}. \\
-9 & -\ 3^2 & \\
\hline 4\,32 & :\ 20\cdot 3 + (6) = (6) & \\
 & :\qquad 66 \quad = (6) & \\
-3\,96 & -\ (66\cdot 6) & \\
\hline 36|25 & :\ 20\cdot 36 + (5) = (5) & \\
 & :\qquad 725 \quad = (5) & \\
-\ 36\,25 & -\ (725\cdot 5) & \\
\hline 00\,00 & &
\end{array}$$

Beispiel 3 $\sqrt{380{,}25} = ?$

Auf Grund der im Beispiel 2 nochmals ausführlich gegebenen Hinweise für die Berechnung wird in den weiteren Berechnungsbeispielen nur noch der Gang der Rechnung gezeigt.

Auflösung der Wurzel	Zwischenrechnungen und Ergebnis	
	Ziffernstelle 1 2 3	
$\sqrt{3\ 80{,}25}$	$= 1\ \ 9\ ,\ 5$ — I — — II — — III —	Die Gruppeneinteilung des Radikanden besagt, daß die **Wurzel dreiziffrig** ist!
-1	$-\ 1^2$ I	
$2|80$	$:\ 20\cdot 1 + (9) = (9)$ II	
	$:\quad 29 \quad = (9)$	
$-2\ 61$	$-\ (29\cdot 9)$	
$19|25$	$:\ 20\cdot 19 + (5) = (5)$ III	
	$:\quad 385 \quad = (5)$	
$-\ 19\ 25$	$-\ (385\cdot 5)$	**Die Wurzel lautet 19,5.**
$00\ 00$		

Beispiel 4 $\sqrt{2\,263{,}8564} = ?$

Auflösung der Wurzel	Zwischenrechnungen und Ergebnis	
	Ziffernstelle	
	① ② ③ ④	
$\sqrt{22\,\vert\,63{,}85\,\vert\,64}$	$= 4\ \ 7\ ,\ 5\ \ 8$	Die **vier** 2er-Gruppen der Radikandenzahl geben an, daß die **Wurzel vierziffrig** ist!
	I II III IV	
-16	-4^2 I	
$6\,\vert\,63$	$: 20 \cdot 4 + (7) = (7)$ II	
	$: 87 = (7)$	
$-\ 6\,09$	$-(87 \cdot 7)$	
$54\,\vert\,85$	$: 20 \cdot 47 + (5) = (5)$ III	
	$: 945 = (5)$	
$-\ 47\,25$	$-(945 \cdot 5)$	
$7\,60\,\vert\,64$	$: 20 \cdot 475 + (8) = (8)$ IV	
	$: 9508 = (8)$	
$-\ 7\,60\,64$	$-(9508 \cdot 8)$	**Die Wurzel lautet 47,58.**
$0\,00\,00$		

Bei Radikanden, die am Zahlenende zwei oder mehr Nullen führen oder die in Dezimalbruchform nach dem Komma erst eine oder mehrere Nullenstellen besitzen, empfiehlt es sich, **vor dem Radizieren** durch **Herausziehen von Zehnerpotenzen** mit **gerad**zahligem positiven oder negativen **Exponenten** den eigentlichen Radiziervorgang zu vereinfachen. Dem ermittelten Wurzelwert der verbleibenden Zahl wird die vorher herausgezogene Zehnerpotenz **mit halbiertem Exponenten** am Schluß der Rechnung **als Faktor** wieder zugesetzt.

Beispiele

$$\sqrt{42\,250\,000} = \sqrt{4\,225 \cdot 10^4} = \sqrt{42\,|\,25} \cdot 10^2 = 65 \cdot 10^2 = \underline{\underline{6500}};$$

$$\sqrt{78\,400} = \sqrt{784 \cdot 10^2} = \sqrt{7\,|\,84} \cdot 10 = 28 \cdot 10 = \underline{\underline{280}};$$

$$\sqrt{0{,}0576} = \sqrt{5{,}76 \cdot 10^{-2}} = \sqrt{5{,}76} \cdot 10^{-1} = 2{,}4 \cdot 10^{-1} = \underline{\underline{0{,}24}};$$

$$\sqrt{0{,}00008281} = \sqrt{82{,}81 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{82{,}81} \cdot 10^{-3} = 9.1 \cdot 10^{-3} = \underline{\underline{0{,}0091}}.$$

Selbstverständlich gibt es in den Berechnungen der Praxis neben den **Quadratwurzeln** auch Wurzeln mit **anderen Wurzelexponenten.** Diese Wurzeln sind schwieriger zu ziehen. Das Rechnen mit Logarithmen (vgl. 2. 3.) vereinfacht aber **auch diese Aufgaben,** selbst wenn sie auf den ersten Blick schwierig erscheinen.

Oft werden umfangreiche Formeln dadurch unübersichtlich, daß in ihnen Wurzelzeichen ($\sqrt{\ }$) vorkommen. Aus diesem Grunde soll darauf hingewiesen werden, daß **statt des Wurzelzeichens** auch noch eine **andere mathematische Schreibweise** die Absicht des Radizierens darstellen kann. Diese Schreibweise soll im folgenden erläutert werden.

Aus den Regeln für das Multiplizieren von Potenzen (vgl. 2. 1. 2.) kann für die Multiplikation von **Potenzen mit gleicher Basis** und **mit gleichen Exponenten** die Regel für das **Potenzieren von Potenzen** abgeleitet werden, z.B. an Hand folgender Aufgaben:

$$3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4 = \underline{\underline{6561}}$$

oder, anders geschrieben,

$$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8 = \underline{\underline{6561}};$$

allgemein ausgedrückt:

$$a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = \underline{\underline{a^6}}$$

oder, anders geschrieben,

$$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = \underline{\underline{a^6}}.$$

Daraus folgt: **Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.**

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$$

Die Radizieraufgabe $\sqrt[3]{10^6}$

besagt, daß die Zahl (der Wurzelwert) gesucht wird, die, mit dem Wurzelexponenten (hier 3) potenziert, den Radikanden (hier 10^6) ergibt. Dieser Radikand könnte auch in drei gleiche Faktoren (hier 10^2) zerlegt werden:

$$\sqrt[3]{10^6} = \sqrt[3]{10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2},$$

und das Ergebnis der Aufgabe wäre dann

$$= \underline{\underline{10^2}} = \underline{\underline{100}}.$$

Würde der vorstehende Rechengang anders geschrieben werden, so würde die Lösung lauten:

$$\sqrt[3]{10^6} = \sqrt[3]{(10^2)^3} = \underline{\underline{10^2}} = \underline{\underline{100}}.$$

Es ist also der **Exponent des Wurzelergebnisses gleich dem Exponenten des Radikanden, dividiert durch den Wurzelexponenten:**

$$\sqrt[3]{10^6} = 10^{\frac{6}{3}} = 10^{\frac{\cancel{6}\,2}{\cancel{3}}} = \underline{\underline{10^2}}.$$

Daher merke:

Potenzen werden radiziert, indem man den Exponenten der Potenz durch den Wurzelexponenten dividiert.

$$\boxed{\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}}$$

Da jede Zahl auch als Potenz mit dem Exponenten »1« geschrieben werden kann, kann **jede Wurzel auch dadurch ausgedrückt** werden, daß der **Wurzelexponent als reziproker Exponent** zum Radikanden gesetzt wird.

$$\sqrt[3]{a} = \underline{\underline{a^{\frac{1}{3}}}}; \quad \sqrt[n]{b} = \underline{\underline{b^{\frac{1}{n}}}};$$

$$\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = \underline{\underline{2}}$$

oder

$$\sqrt[8]{9^4} = 9^{4 \cdot \frac{1}{8}} = 9^{\frac{4}{8}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = \underline{\underline{3}}.$$

2. 3. Logarithmieren*) (Siebte Grundrechenart)

Das Rechnen mit Logarithmen bietet dem Fernmeldetechniker viele Vorteile. Es setzt aber auch andererseits besondere Kenntnisse und Übung voraus, so daß nach den Ausbildungsplänen erst in den Grundlagen- und Aufbaulehrgängen AFt/BFt über dieses Rechnen unterrichtet werden soll. Das Logarithmenrechnen wird aus diesem Grunde auch erst in den Lernblättern F für diese Lehrgänge eingehender behandelt werden.

Die **Vorteile** des Logarithmierens werden vom **Rechenschieber** ausgenutzt: Die Skalen des Rechenschiebers sind logarithmisch eingeteilt. Durch einfaches räumliches Aneinanderreihen der Teilstrecken lassen sich Multiplikations- und Divisionsaufgaben lösen. Auf zwei Skalen mit unterschiedlicher logarithmischer Teilung lassen sich die Ergebnisse des Potenzierens und des Radizierens durch einfaches Ablesen ermitteln. Die Genauigkeit ist für die praktischen Erfordernisse allgemein ausreichend.

In den folgenden Ausführungen sollen nur die Grundlagen des Logarithmierens erläutert werden:

Das Logarithmieren ist die **zweite Umkehrung des Potenzierens.**

Beim **Potenzieren** sind die Basis a und der Exponent n gegeben.

Gesucht wird der Potenzwert b.

Beispiel

$$a^n = \underline{\underline{b}},$$
$$5^3 = \underline{\underline{125}}.$$

Beim **Radizieren** sind der Potenzwert b (hier »Radikand« genannt) und der Exponent n (hier »Wurzelexponent« genannt) bekannt.

Gesucht wird die Basis a (hier »Wurzel« genannt).

Beispiel

$$\sqrt[n]{b} = \underline{\underline{a}},$$
$$\sqrt[3]{125} = \underline{\underline{5}}.$$

Beim **Logarithmieren** sind die Basis a des Logarithmensystems und der Potenzwert b (hier »Numerus« genannt) gegeben.

Gesucht wird der Exponent n (hier »Logarithmus« zur Zahl b für die Basis a genannt).

Beispiel

$${}^{a}\log b = \underline{\underline{n}},$$
$${}^{5}\log 125 = \underline{\underline{3}}.$$

Das letzte Beispiel (Logarithmieren) wird gelesen:

»Der Logarithmus von b zur Basis a ist gleich n« oder
»Der Logarithmus von 125 zur Basis 5 ist gleich 3«.

*) »logos arithmos« aus dem Griechischen = »Verhältniszahl«

Beim Logarithmieren bedeuten also: (zum Beispiel)

a = **Basis des Logarithmensystems** (5)

b = **Numerus** (= Zahl), zu dem der Logarithmus gesucht wird (125)

n = **Logarithmus** der Zahl b zur Basis a (3)

Der Logarithmus einer Zahl (des Numerus) b zur Basis a ist demnach diejenige Zahl, mit der die Basis a potenziert werden muß, um die Zahl b zu erhalten ($a^n = b$). Das Logarithmieren ist daher die zweite Umkehrung des Potenzierens.

So ist

$$^{10}\log 1000 = 3, \quad \text{weil } 10^3 = 1000;$$

$$^{10}\log 0{,}01 = -2, \quad \text{weil } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01;$$

$$^{2}\log 32 = 5, \quad \text{weil } 2^5 = 32;$$

$$^{3}\log 81 = 4, \quad \text{weil } 3^4 = 81;$$

$$^{10}\log 2 = \lg 2 = 0{,}30103, \quad \text{weil } 10^{0{,}30103} = 2;$$

$$^{e}\log 2 = \ln 2 = 0{,}69314, \quad \text{weil } e^{0{,}69314} = 2.$$

Theoretisch ist es möglich, Logarithmensysteme zu jeder Basis zu bilden und mit ihnen zu rechnen. Wird daher irgendeine beliebige Basiszahl a gewählt, dann wird in der Rechnung das Logarithmieren zu dieser Basis a durch den Ausdruck »^{a}log ..« geschrieben.

In der Praxis haben jedoch **nur zwei Logarithmensysteme Bedeutung** erlangt:

Logarithmen mit der Basis e*)

$$^{e}\log b = \ln b,$$

die sogenannten **natürlichen Logarithmen (ln)** — auch **Neper'sche****) **Logarithmen** genannt —, die in vielen physikalischen Berechnungsformeln — auch in der Fernmeldetechnik — und beim Zusammenstellen logarithmisch geteilter Skalen verwendet werden.

Logarithmen mit der Basis 10

$$^{10}\log b = \lg b,$$

die sogenannten **gemeinen Logarithmen (lg)** — auch **dekadische, Zehner-, Briggs'sche***) Logarithmen** genannt —, die heute unentbehrlich geworden sind, weil sich mit ihnen Aufgaben jeder Art berechnen lassen.

Beide Logarithmensysteme sind je nach Aufgabe und Problemstellung heute nebeneinander im Gebrauch.

Sollen aus natürlichen Logarithmen (ln) die zugehörigen dekadischen Logarithmen (lg) berechnet werden, so gilt hierfür der **Umrechnungsfaktor**

$$\boxed{\lg x = 0{,}43429 \cdot \ln x}$$

Ebenso können auch aus den dekadischen Logarithmen (lg) die zugehörigen natürlichen Logarithmen (ln) berechnet werden mit dem **Umrechnungsfaktor**

$$\boxed{\ln x = 2{,}30258 \cdot \lg x}$$

*) e ist die »Zahl des natürlichen Wachstums« und hat den Wert e = 2,718 ...

**) Benannt nach dem schottischen Mathematiker Napier, der von 1550 bis 1617 lebte und gleichzeitig mit Bürgi die Logarithmen erfand.

***) Benannt nach dem englischen Mathematiker Henry Briggs, der von 1561 bis 1630 lebte und die Logarithmen mit der Basis 10 einführte.

Für den praktischen Gebrauch werden die Logarithmen aus Rechentafeln, den sogenannten Logarithmentafeln, entnommen. Diesen Tafeln kann für jede Zahl (den sogenannten **Numerus**) der **Logarithmus** und am Ende des Rechenganges zu den ermittelten Logarithmen wieder der Numerus (das Endergebnis der Rechnung in Zahlen) entnommen werden.

Auf jeden Fall setzt das Rechnen mit Logarithmen den Besitz einer Logarithmentafel voraus.

Dabei sind die Ergebnisse um so genauer, je vielstelliger die Zahlenwerte (Mantissen) der verwendeten Logarithmentafel sind. Im allgemeinen genügen die im Schulunterricht verwendeten vier- oder fünfstelligen Logarithmen den Anforderungen der Praxis.

Logarithmen werden angewendet, um schwierigere Zahlenausdrücke — wie mehrgliedrige Produkte, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln — bequem ausrechnen zu können. Der **Vorteil des Logarithmierens** ist dabei daß jede Rechenart in die nächstniedere zurückgeführt wird,

die Multiplikation in die Addition: $\log (a \cdot b) = \underline{\underline{\log a + \log b}};$

die Division in die Subtraktion: $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \underline{\underline{\log a - \log b}};$

das Potenzieren in das Multiplizieren: $\log a^n = \underline{\underline{n \cdot \log a}};$

das Radizieren in das Dividieren: $\log \sqrt[n]{a} = \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \log a = \underline{\underline{\frac{\log a}{n}}}.$

2. 4. Fragen zu Abschnitt 2 (Die höheren Grundrechenarten)

1. Wie nennt man das vereinfachte Rechenverfahren der vielfachen Multiplikation gleicher Größen?
2. Wie heißt der Exponent in deutscher Ausdrucksweise?
3. Welches Vorzeichen erhält das Ergebnis negativer Potenzen mit ungeraden Exponenten?
4. Bei welcher Art von Zahlenansatz können bei Potenzen die Addition und die Subtraktion unmittelbar durchgeführt werden?
5. Wie nennt man Potenzen mit der Basis 10?
6. Welche Zehnerpotenzen haben besondere Abkürzungen erhalten?
7. Wie heißen die beiden Umkehrungen der Potenzrechnung?
8. Welches Lösungsschema verwendet man beim Radizieren?
9. Welche Rechenvorteile bietet das Logarithmieren?

5. 65

Aufgabensammlung

Aufgaben zu Abschnitt 1. 1. (Bruchrechnen)

1) Verwandle in unechte Brüche!

$4\frac{3}{4}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}$, $6\frac{4}{5}$, $5\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $5\frac{7}{12}$, $15\frac{4}{7}$.

2) Verwandle in gemischte Zahlen!

$\frac{17}{3}$, $\frac{28}{6}$, $\frac{19}{4}$, $\frac{22}{10}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{120}{11}$, $\frac{136}{27}$, $\frac{162}{48}$.

Aufgaben zu Abschnitt 1. 1. 1. (Addition und Subtraktion von Brüchen)

3) Erweitere folgende Brüche mit 3, 5, 6 und 7!

$\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{16}$, $\frac{27}{35}$, $\frac{120}{37}$.

4) Kürze folgende Brüche soweit wie möglich, und verwandle sie gegebenenfalls in gemischte Zahlen!

$\frac{3}{6}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{24}{9}$, $\frac{18}{12}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{8}{40}$,

$\frac{12}{36}$, $\frac{16}{8}$, $\frac{90}{114}$, $\frac{125}{275}$, $\frac{372}{996}$.

5) Mache folgende Brüchegruppen gleichnamig! und ad.

$\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{2}$;

$\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$; $\frac{4}{7}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{19}{21}$;

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{6}{10}$, $\frac{4}{7}$.

Bei den folgenden Aufgaben sind Brüche bzw. gemischte Zahlen zu addieren und gegebenenfalls in gemischte Zahlen zurückzuverwandeln!

6) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$; $\frac{3}{8} + \frac{4}{7}$; $\frac{4}{7} + \frac{5}{9}$; $\frac{5}{9} + \frac{11}{3}$; $\frac{11}{3} + \frac{4}{7}$.

7) $\frac{4}{7} + \frac{5}{8}$; $\frac{5}{8} + \frac{11}{16}$; $\frac{11}{16} + \frac{27}{35}$; $\frac{27}{35} + \frac{120}{15}$.

8) $4\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{8} + 3\frac{3}{8}$; $6\frac{3}{5} + 5\frac{1}{3}$.

9) $1\frac{3}{4} + 5\frac{4}{5} + 15\frac{4}{7}$; $2\frac{1}{2} + 8\frac{1}{4} + 6\frac{3}{4}$; $1\frac{7}{12} + 1\frac{3}{5} + 2\frac{1}{3}$.

Subtrahiere folgende Ausdrücke, und schreibe die Ergebnisse gegebenenfalls als gemischte Zahlen!

10) $\frac{3}{4} - \frac{2}{5}$; $8\frac{3}{4} - \frac{4}{15}$; $9\frac{17}{20} - 9\frac{3}{12}$.

11) $25\frac{7}{5} - 5\frac{3}{4}$; $5\frac{3}{8} - \frac{1}{20}$; $6\frac{3}{4} - 1\frac{1}{2} - 3\frac{4}{5}$.

12) $3\frac{1}{8} - \frac{6}{11} - 1\frac{3}{44}$; $125\frac{1}{4} - 36\frac{3}{4} - 17\frac{2}{3} - 1\frac{5}{6}$.

13) $56\frac{3}{4} - 4\frac{3}{4} - 1\frac{3}{8} - 12\frac{7}{9}$.

14) $120\frac{1}{2} - 18\frac{3}{4} - 32\frac{5}{8} - 11\frac{3}{4} - 15\frac{7}{12}$.

Subtrahiere von den gemischten Zahlen die Brüche bzw. gemischten Zahlen!

15) $4\frac{1}{2} - \frac{4}{5}$; $4\frac{3}{4} - \frac{4}{5}$; $5\frac{1}{8} - \frac{4}{5}$; $6\frac{7}{9} - \frac{4}{5}$; $10\frac{5}{6} - \frac{4}{5}$.

16) $4\frac{1}{2} - 1\frac{3}{4}$; $4\frac{3}{4} - 1\frac{3}{4}$; $5\frac{1}{8} - 1\frac{3}{4}$; $6\frac{7}{9} - 1\frac{3}{4}$; $10\frac{5}{6} - 1\frac{3}{4}$.

17) $4\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2}$; $4\frac{3}{4} - 2\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{8} - 2\frac{1}{2}$; $6\frac{7}{9} - 2\frac{1}{2}$; $10\frac{5}{6} - 2\frac{1}{2}$.

18) $4\frac{1}{2} - 1\frac{5}{8}$; $4\frac{3}{4} - 1\frac{5}{8}$; $5\frac{1}{8} - 1\frac{5}{8}$; $6\frac{7}{9} - 1\frac{5}{8}$; $10\frac{5}{6} - 1\frac{5}{8}$.

19) $4\frac{1}{2} - 3\frac{2}{3}$; $4\frac{3}{4} - 3\frac{2}{3}$; $5\frac{1}{8} - 3\frac{2}{3}$; $6\frac{7}{9} - 3\frac{2}{3}$; $10\frac{5}{6} - 3\frac{2}{3}$.

Addiere zu den gemischten Zahlen die Brüche bzw. gemischten Zahlen!

20) $4\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$; $4\frac{3}{4} + \frac{3}{8}$; $5\frac{1}{8} + \frac{3}{8}$; $6\frac{7}{9} + \frac{3}{8}$; $10\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$.

21) $4\frac{1}{2} + \frac{15}{32}$; $4\frac{3}{4} + \frac{15}{32}$; $5\frac{1}{8} + \frac{15}{32}$; $6\frac{7}{9} + \frac{15}{32}$; $10\frac{5}{6} + \frac{15}{32}$.

22) $4\frac{1}{2} + 1\frac{4}{5}$; $4\frac{3}{4} + 1\frac{4}{5}$; $5\frac{1}{8} + 1\frac{4}{5}$; $6\frac{7}{9} + 1\frac{4}{5}$; $10\frac{5}{6} + 1\frac{4}{5}$.

23) $4\frac{1}{2} + 2\frac{16}{25}$; $4\frac{3}{4} + 2\frac{16}{25}$; $5\frac{1}{8} + 2\frac{16}{25}$; $6\frac{7}{9} + 2\frac{16}{25}$; $10\frac{5}{6} + 2\frac{16}{25}$.

24) $4\frac{1}{2} + 8\frac{1}{3}$; $4\frac{3}{4} + 8\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{8} + 8\frac{1}{3}$; $6\frac{7}{9} + 8\frac{1}{3}$; $10\frac{5}{6} + 8\frac{1}{3}$.

25) $4\frac{1}{2} + 5\frac{4}{7}$; $4\frac{3}{4} + 5\frac{4}{7}$; $5\frac{1}{8} + 5\frac{4}{7}$; $6\frac{7}{9} + 5\frac{4}{7}$; $10\frac{5}{6} + 5\frac{4}{7}$.

26) $4\frac{1}{2} + 7\frac{1}{4}$; $4\frac{3}{4} + 7\frac{1}{4}$; $5\frac{1}{8} + 7\frac{1}{4}$; $6\frac{7}{9} + 7\frac{1}{4}$; $10\frac{5}{6} + 7\frac{1}{4}$.

Aufgaben zu Abschnitt 1. 1. 2. (Multiplikation und Division von Brüchen)

27) Erweitere folgende Brüche mit 2, 4 und 11!

$\frac{1}{4}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{10}{22}$.

28) Kürze folgende Brüche!

$\frac{3}{12}$; $\frac{12}{15}$; $\frac{12}{20}$; $\frac{12}{14}$; $\frac{105}{120}$; $\frac{84}{108}$; $\frac{70}{154}$.

Bei den folgenden Aufgaben sind die Ergebnisse zu kürzen. Ergeben sich unechte Brüche, sind sie in gemischte Zahlen umzuschreiben!

29) $\frac{1}{4} \cdot 1\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5} \cdot 1\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{2}$; $\frac{5}{7} \cdot 1\frac{1}{2}$.

30) $\frac{5}{8} : 1\frac{1}{3}$; $\frac{7}{9} : 1\frac{1}{3}$; $\frac{10}{22} : 1\frac{1}{3}$.

31) $\frac{3}{12} \cdot 2\frac{4}{5}$; $\frac{12}{15} \cdot 2\frac{4}{5}$; $\frac{12}{20} \cdot 2\frac{4}{5}$.

32) $\frac{12}{14} : \frac{3}{4}$; $\frac{105}{120} : \frac{3}{4}$; $\frac{84}{108} : \frac{3}{4}$; $\frac{70}{154} : \frac{3}{4}$.

33) $\frac{3}{4} \cdot 5$; $\frac{5}{12} \cdot 9$; $\frac{15}{24} \cdot 6$; $\frac{13}{15} \cdot 12$; $\frac{21}{28} \cdot 7$.

34) $7\frac{3}{4} \cdot 4$; $6\frac{4}{7} \cdot 8$; $1\frac{4}{5} \cdot 12$; $6\frac{2}{3} \cdot 3$; $7\frac{1}{4} \cdot 6$.

35) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{6}$; $\frac{4}{7} \cdot \frac{8}{9}$; $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{8}$; $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9}$; $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{8}$.

36) $4\frac{3}{8} \cdot 2\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{4} \cdot 3\frac{3}{4}$; $6\frac{1}{5} \cdot 2\frac{9}{10}$; $4\frac{3}{5} \cdot 6\frac{2}{3}$; $1\frac{4}{7} \cdot 6\frac{7}{9}$.

37) $12\frac{3}{4} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 6\frac{4}{5}$; $4\frac{5}{7} \cdot 8\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{4}$; $6\frac{3}{8} \cdot 4\frac{2}{3} \cdot 2\frac{10}{12}$.

38) Ein Fahrzeug legt in 1 Stunde $65\frac{3}{4}$ km zurück.

Wieviel km legt es in $2\frac{3}{4}$ Stunden zurück?

39) Der Betrieb eines Lötkolbens kostet je Stunde $8\frac{1}{2}$ Pfennig.

Wie hoch sind die Kosten bei $\frac{6}{10}$ Stunden Benutzungsdauer?

40) Ein Meter Kupferdraht von bestimmtem Durchmesser hat einen Widerstand von $\frac{8}{100}\,\Omega$.

Wie groß ist der Widerstand dieses Drahtes bei einer Länge von $328\frac{3}{4}$ m?

41) In Deutschland werden jährlich für $8\frac{1}{3}$ Millionen DM Fernmeldekabel eines bestimmten Typs gefertigt. $\frac{5}{7}$ dieser Fertigung werden noch im gleichen Jahr weiterverarbeitet.

Welchen Geldwert besitzt die verarbeitete Menge?

5. 65

Bei den folgenden Aufgaben sind die Ergebnisse — falls möglich — zu kürzen. Ergeben sich unechte Brüche, sind sie in gemischte Zahlen umzuschreiben!

42) $\frac{8}{9} : \frac{3}{5}$; $\frac{5}{12} : \frac{3}{4}$; $\frac{7}{9} : \frac{1}{2}$; $\frac{6}{7} : \frac{3}{5}$; $\frac{5}{8} : \frac{11}{32}$.

43) $\frac{3}{5} : 3$; $\frac{15}{19} : 5$; $\frac{8}{9} : 4$; $\frac{12}{13} : 3$; $\frac{16}{17} : 4$.

44) $3\frac{2}{5} : 2$; $4\frac{1}{2} : 3$; $5\frac{2}{5} : 4$; $6\frac{1}{4} : 5$; $7\frac{2}{3} : 6$.

45) $3\frac{3}{4} : 2\frac{1}{2}$; $4\frac{4}{5} : 3\frac{1}{3}$; $4\frac{5}{6} : 5\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{8} : 2\frac{1}{4}$; $17\frac{2}{3} : 3\frac{1}{2}$.

46) $\frac{8}{9} + \frac{3}{5}$; $\frac{5}{12} + \frac{3}{4}$; $\frac{7}{9} + \frac{1}{2}$; $\frac{6}{7} + \frac{3}{5}$; $\frac{5}{8} + \frac{11}{32}$.

47) $\frac{3}{5} - \frac{3}{7}$; $\frac{15}{19} - \frac{3}{4}$; $\frac{8}{9} - \frac{5}{6}$; $\frac{11}{13} - \frac{2}{17}$; $\frac{1}{2} - \frac{2}{5}$.

48) $3\frac{3}{4} \cdot 2\frac{1}{2}$; $4\frac{4}{5} \cdot 3\frac{1}{3}$; $4\frac{5}{6} \cdot 5\frac{1}{2}$; $5\frac{1}{8} \cdot 2\frac{1}{4}$; $17\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{2}$.

49) Eine Kilowattstunde kostet $\frac{1}{10}$ DM.

Wieviel Stunden brannten 12 Glühlampen mit einem Verbrauch von je 100 Watt, wenn die entstandenen Stromkosten 8 DM betragen?

50) $\dfrac{\frac{7}{9} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{4}{5}}$; $\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{4}{7} \cdot \frac{19}{21}}$.

Aufgaben zu Abschnitt 1. 2. (Dezimalbruchrechnen)

51) Multipliziere folgende Dezimalbrüche miteinander!

3,77 · 3;	16,19 · 18;
10,63 · 5,6;	0,34 · 0,49;
0,004 · 8,13;	64,345 · 199,791;
0,0025 · 0,0007;	8,61 · 10000;
34,07 · 2,008;	421,002 · 0,009.

52) Führe nachfolgende Divisionen aus!

614,3 : 10,0;	0,0024 : 0,6;
38,13 : 12,3;	0,321 : 0,0002;
76645,7 : 234,5;	8324,6 : 0,24;
0,344 : 0,012;	426,33 : 14,3;
13,3 : 65,15;	67200,3 : 24,6.

53) Verwandle folgende echte Brüche in Dezimalbrüche!

$\frac{1}{2}$; $\frac{4}{5}$; $\frac{3}{20}$; $\frac{24}{25}$; $\frac{3}{18}$; $\frac{47}{50}$; $\frac{13}{40}$; $\frac{117}{300}$.

54) Teile die Dezimalbrüche durch die gewöhnlichen Brüche!

$84{,}25 : \frac{3}{4}$; $44{,}6 : \frac{2}{3}$;

$0{,}25 : \frac{5}{10}$; $2536{,}0 : \frac{8}{16}$;

$725{,}40 : \frac{4}{8}$; $3{,}65 : \frac{2}{15}$.

Aufgaben zu Abschnitt 1. 3. (Reihenfolge der Rechenoperationen)

Vereinfache unter Beachtung der notwendigen Reihenfolge nachstehende Rechenansätze und löse sie dann!

55) $8 + 4 \cdot 6$

56) $16 - 4 : 2$

57) $8 \cdot (5 + 3)$

58) $24 : (16 - 12)$

59) $144 : (36 - 24) + 3$

60) $40 \cdot [(27 + 9 - 30) : 6]$

61) $(16 + 13 - 4) : 5$

62) $(84 : 7 + 16 - 4) : 2$

63) $3 \cdot (0{,}5 + 6{,}3 - 2{,}8)$

64) $364 : (47 + 5)$

Aufgaben zu Abschnitt 1. 4. (Positive und negative Zahlen)

65) $(+6) + (+3)$;
$(+13) + (+5)$;
$(-20) + (-5)$;
$(-25) + (-15)$;
$(-6) + (+10)$.

66) $(+14) - (+7)$;
$(+28) - (+14)$;
$(-36) - (-12)$;
$(-84) - (-24)$;
$(+5) - (-7)$.

67) $(+4) \cdot (+4)$;
$(+7) \cdot (+6)$;
$(-8) \cdot (-6)$;
$(-12) \cdot (-12)$;
$(-18) \cdot (-3)$.

68) $(+6) \cdot (-3)$;
$(-7) \cdot (+4)$;
$(-12) \cdot (+12)$;
$(+5) \cdot (-6)$;
$(+25) \cdot (-4)$.

69) $(+84) : (+7)$;
$(-99) : (-11)$;
$(+56) : (+7)$;
$(+45) : (+3)$.

70) $(+64) : (-8)$;
$(-75) : (+15)$;
$(+125) : (-5)$;
$(-143) : (+13)$.

Aufgaben zu Abschnitt 1. 5. (Dreisatzrechnen)

71) Aus 675 m Widerstandsdraht wurden 75 gleiche Einzelwiderstände hergestellt.
Wieviel Meter dieses gleichen Widerstandsdrahtes würde man benötigen, wenn daraus 235 Einzelwiderstände der gleichen Art hergestellt werden sollen?

72) Ein Fernmeldehandwerker benötigt zum Verlegen von 12,5 m Schlauchdraht 55 Minuten.
Welche Zeit wird er bei gleichen Voraussetzungen für die Verlegung von 32 m Schlauchdraht brauchen?

73) Von einem Kabelgraben werden in 22 Tagen 840 laufende Meter fertiggestellt.
Wieviel laufende Meter würden unter den gleichen Arbeitsbedingungen in nur 8 Tagen fertiggestellt werden können?

74) Ein Bauplatz von $432\,m^2$ kostet 4525,— DM.
Welche Größe hat ein Bauplatz bei gleichem Quadratmeterpreis, wenn dafür 10000,— DM gefordert werden?

75) 6 Wasserleitungsrohre gleichen Querschnitts füllen unter bestimmtem Druck ein Becken in $2\frac{1}{4}$ Stunden.
Wie viele solcher Rohre müßten verwendet werden, um das Becken unter dem gleichen Druck in $1\frac{1}{2}$ Stunden zu füllen?

76) Ein bestimmter Benzinvorrat reicht für 10 Lötlampen 26 Tage.
Wie lange würde der gleiche Benzinvorrat reichen, wenn mit 36 Lötlampen gearbeitet wird?

77) Eine bestimmte Arbeit ist in 6 Tagen zu schaffen, wenn 32 Arbeiter eingesetzt werden.
Wie lange wird die gleiche Arbeit dauern, wenn nur 14 Arbeiter zur Verfügung stehen?

78) Ein Feldbahngleis wird von 28 Arbeitern in 72 Tagen verlegt.
In wie vielen Tagen könnte das Gleis verlegt werden, wenn 7 Arbeiter mehr beschäftigt werden würden?

79) In 5 Arbeitstagen werden auf jeder von 6 Baustellen 7 kg Propangas benötigt.
Wieviel Propangas würde erforderlich sein, wenn an 14 Tagen auf 10 Baustellen gearbeitet wird?

80) 10 Bautrupps verarbeiten innerhalb von 2 Wochen im Durchschnitt 1250 m einer bestimmten Schlauchdrahtsorte.
Berechne den Jahresbedarf (52 Wochen) in Metern Schlauchdraht für insgesamt 85 Bautrupps!

81) 6 Handwerker würden mit einem bestimmten Vorrat an Kabelbefestigungsmaterial 6 Wochen auskommen. 14 Tage nach Beginn dieses Zeitraumes erkranken 2 Handwerker.
Wie viele Wochen reicht der gleiche Vorrat **nach Erkrankung** dieser beiden Kräfte unter den gleichen Arbeitsumständen noch aus?

82) 5000,— DM stehen für die Beschaffung von Büromaterial jährlich zur Verfügung. Wenn der Betrag um $\frac{1}{4}$ gekürzt werden muß, steht monatlich nur noch eine geringere Summe zur Verfügung.
Wie groß ist sie ?

Aufgaben zu Abschnitt 1. 6. (Prozentrechnen)

83) Von 720,— DM Monatseinkommen werden jeweils 4% gespart.
Welche Summe liegt als Sparbetrag nach Ablauf eines Jahres vor?

84) In einem bestimmten Beruf sind $66\,^2/_3\,\%$ der Tage eines Jahres (= 365 Tage) Arbeitstage.
Um wie viele Arbeitstage handelt es sich also?

85) Jemand bezahlt bisher monatlich 98,— DM Miete. Seine Miete wird um $12\,^1/_2\,\%$ heraufgesetzt.
Berechne die neue Monatsmiete!

86) Ein Fernsehgerät wird im Preis um 8% heraufgesetzt und kostet nun 783,— DM.
Wieviel kostete das Gerät vor der Preiserhöhung?

87) Ein Neubau wird durch den zusätzlichen Ausbau des Dachgeschosses um 15% teurer erstellt als geplant und kostet somit 145 310,— DM.
Wie hoch lag der ursprüngliche Kostenanschlag?

88) Die Zahl der Zuschauerplätze eines Sportstadions wird durch bauliche Erweiterungen um 8% erhöht. Bei einem durchschnittlichen Preis von 1,80 DM pro Platz betragen nunmehr die Kasseneinnahmen 40 824,— DM, wenn alle Plätze verkauft sind.
Wie viele Plätze waren vor dem Ausbau vorhanden?

89) Ein Auto wird mit einem Gewinn von 16 % weiterverkauft und bringt 2 784,— DM.
Zu welchem Preis hat der Verkäufer das Auto erworben?

90) Gußeisen zeigt ein Schwindmaß von 1,04%.
Welche Länge muß das Gußmodell (aus Holz) für ein Zylinderrohr besitzen, wenn das gegossene Rohr 750 mm lang sein soll?

91) Der Widerstand eines Leiters erhöht sich bei Erwärmung um 1,25% und beträgt dann 12,6 Ohm.
Welchen Widerstand besaß der Leiter vor der Erwärmung?

92) Von 45 700 Unfällen im Jahr verlaufen 352 tödlich.
Wieviel Prozent der gesamten Unfälle entsprechen die Todesfälle?

93) In einem Ortsnetz befinden sich bei 2 400 Anschlüssen 16 öffentliche Sprechstellen.
Wieviel Prozent der gesamten Anschlüsse machen diese öffentlichen Sprechstellen aus?

94) In einer Stadt wurden
1948 1 285 000 Ortsgespräche,
1958 3 985 000 Ortsgespräche gezählt.
Um wieviel Prozent haben die Ortsgespräche zugenommen?

95) Von 78 geprüften Fernmeldelehrlingen haben 22 die Handwerkerprüfung mit »gut«, 33 mit »befriedigend« und der Rest mit »ausreichend« bestanden.
Wieviel Prozent aller Prüflinge bestanden mit »gut«, »befriedigend« und »ausreichend«?

96) In einer Lehrwerkstatt waren laut Statistik im Mittel 4,5% aller Lehrlinge krankgeschrieben; dieser Prozentsatz entspricht 9 Lehrlingen.
Wie viele Lehrlinge befanden sich daher in der Ausbildung?

97) Im Jahre 1960 hatte eine Stadt 12% Einwohner mehr als 1950, d. h., ihre Einwohnerzahl war um 17 500 gestiegen.
Wieviel Einwohner waren es daher im Jahre 1950?

98) Jemand erhält 150,— DM Finderlohn, der 8,75% des Fundwertes entspricht.
Wie groß war der Wert des Fundes?

99) Ein Betrieb zahlt monatlich $3\,^1/_2\,\%$ Umsatzsteuer, entsprechend einem Steuerbetrag von 425,90 DM.
Wie hoch liegt daher der monatliche Umsatz?

Aufgaben zu Abschnitt 2. 1. 1. (Addition und Subtraktion von Potenzen mit positivem Exponenten)

Addiere bzw. subtrahiere!

100) $3^2 + 4^2$; $2 \cdot 3^4 + 5 \cdot 2^4$; $5 \cdot 7^2 - 3 \cdot 5^2$.

101) $6 \cdot 4^2 - 2 \cdot 4^2$; $5{,}2 \cdot 3^4 - 1{,}2 \cdot 3^4$; $1{,}2 \cdot 2{,}5^2 - 2{,}5 \cdot 1{,}2^2$.

102) $3 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^4$; $5 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^3$; $8{,}6 \cdot 1{,}2^2 - 4{,}3 \cdot 1{,}2^2$.

103) $10^2 + 10^2$; $2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^3$; $4{,}5 \cdot 10^6 - 2{,}2 \cdot 10^6$.

104) $1{,}5 \cdot 10^5 - 0{,}5 \cdot 10^5$; $2{,}9 \cdot 10^4 - 1{,}8 \cdot 10^4$; $0{,}85 \cdot 10^7 - 0{,}24 \cdot 10^7$.

105) $3{,}2 \cdot 10^3 - 16 \cdot 10^2$; $4{,}5 \cdot 10^2 - 5 \cdot 10^3$; $4 \cdot 10^3 - 0{,}5 \cdot 10^4$.

106) $5{,}4 \cdot 10^6 + 2{,}8 \cdot 10^7$; $9{,}8 \cdot 10^6 + 8{,}8 \cdot 10^8$; $3{,}25 \cdot 10^8 + 145 \cdot 10^6$.

107) $3{,}27 \cdot 10^4 - 3{,}27 \cdot 10^2$; $268 \cdot 10^3 + 0{,}217 \cdot 10^6$; $1{,}9 \cdot 10^6 - 2{,}5 \cdot 10^5$.

Aufgaben zu Abschnitt 2. 1. 2. (Multiplikation und Division von Potenzen)

Multipliziere die nachfolgenden Potenzen mit Hilfe des Potenzrechnens!

108) $2^5 \cdot 2^2$; $4{,}5^6 \cdot 4{,}5^2$; $1{,}5 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3^2$.

109) $3 \cdot 2^3 \cdot 4{,}5 \cdot 2^4$; $1{,}8 \cdot 5^3 \cdot 10 \cdot 5^2$; $4{,}8 \cdot 2^2 \cdot 1{,}5 \cdot 2^4$.

110) $1{,}5 \cdot 10^2 \cdot 2{,}8 \cdot 10^3$; $0{,}75 \cdot 10^3 \cdot 1{,}5 \cdot 10^5$; $5 \cdot 10^6 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{10}$.

111) Beachte die Reihenfolge der Rechenoperationen!

$1{,}5 \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^9$; $2{,}4 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 10^2 + 0{,}5 \cdot 10^8$.

112) Dividiere die Potenzen gleicher Basen!

$2^4 : 2^2$; $3{,}2^7 : 3{,}2^3$; $5{,}4^3 : 5{,}4^5$.

Dividiere nachstehende Produkte!

113) $(2{,}5 \cdot 4^3) : (1 \cdot 4^2)$; $(5 \cdot 6{,}3^5) : (2 \cdot 6{,}3^3)$; $(3 \cdot 10^{15}) : (2 \cdot 10^{12})$.

114) $(4{,}5 \cdot 10^{16}) : (3 \cdot 10^{10})$; $(12 \cdot 10^4) : (6 \cdot 10^4)$; $(1{,}8 \cdot 10^9) : (9 \cdot 10^6)$.

115) Fasse zu **einem** Zahlenausdruck zusammen!

$(2 \cdot 10^{12}) : (1{,}5 \cdot 10^8) + 2{,}4 \cdot 10^5$; $(7{,}4 \cdot 10^6) : (3{,}7 \cdot 10^4) - 150$.

Berechne die Summen bzw. Differenzen folgender Potenzen mit ungleichen Basen und ungleichen Exponenten!

116) $3^4 + 2^{-3}$; $2^{-2} + 3^{-3}$; $5^{-2} + 3^3$; $6^2 + 4^4$.

117) $5^2 - 3^{-2}$; $2^4 - 3^{-3}$; $6^3 - 4^{-2}$; $3^3 - 1{,}5^{-2}$.

Multipliziere bzw. dividiere nachstehende Potenzen mit positiven bzw. negativen Exponenten!

118) $5^{10} \cdot 5^{-8}$; $7^{-3} \cdot 7^{-4}$; $6^4 \cdot 6^{-4}$; $1{,}5 \cdot 10^{12} \cdot 2 \cdot 10^{-4}$.

119) $1{,}5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^{-5}$; $2{,}8 \cdot 10^{14} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}$; $5 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^6$.

120) $(2{,}5 \cdot 10^{12}) : (1{,}25 \cdot 10^{-10})$; $(3{,}8 \cdot 10^{-1}) : (4 \cdot 10^3)$;
$\dfrac{5 \cdot 10^{-6}}{2{,}5 \cdot 10^{-2}}$.

121) $\dfrac{1{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \cdot 10^{12}}{4 \cdot 10^{-8}}$; $\dfrac{2{,}8 \cdot 10^6 \cdot 5{,}8 \cdot 10^8}{5 \cdot 10^6}$.

122) Fasse die gemischt zusammengesetzten Potenzwerte zusammen!
$5{,}5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^7$; $(5{,}2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3) \cdot 4{,}3 \cdot 10^{-2}$.

Aufgaben zu Abschnitt 2. 1. 3. (Zehnerpotenzen)

Schreibe folgende Zehnerpotenzen als gewöhnliche Zahlen!

123) $42 \cdot 10^{-3}$; $0{,}4 \cdot 10^{-3}$; $28 \cdot 10^4 \cdot 10^{-6}$; $2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9}$.

124) $\dfrac{1}{10^{-8}}$; $\dfrac{2 \cdot 10^3}{10^{-6}}$; $\dfrac{4 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 10^{-4}}$; $\dfrac{2{,}8 \cdot 10^{-2} \cdot 10^4}{5{,}6 \cdot 10^{-3}}$.

125) Bestimme die Frequenz in GHz!

$$f = \frac{3 \cdot 10^6}{14 \cdot 10^{-2}}\ \mathrm{Hz}.$$

126) Gib die Geschwindigkeit in $\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ an!

$$v = \frac{5{,}85 \cdot 10^{12}}{4{,}2 \cdot 10^{10}}\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{Std}}$$

127) Gib die Kapazität in pF an!

$$C = \frac{1}{6{,}28 \cdot 2 \cdot 10^{10} \cdot 0{,}4 \cdot 10^6 \cdot 10^{-7}}\ \mathrm{F}$$

128) Gib die Strecke in Mikrometer an!
$s = 5{,}2 \cdot 10^{-4}$ dm

129) Gib die Leistung in MW an!
$P = 25 \cdot 10^7 \cdot 3{,}6 \cdot 10^{-3}$ mW

130) Gib das Gewicht in g an!
$G = 1{,}28 \cdot 10^{-7} \cdot 4{,}8 \cdot 10^2$ t

131) Gib den Widerstand in MΩ an!

$$R = \frac{1{,}2 \cdot 10^6 \cdot 3 \cdot 10^5}{1{,}5 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5}\ \Omega$$

132) Gib die Induktivität in H an!
$L = 6{,}28 \cdot 10^{14} \cdot 10^{-12} \cdot 2{,}5 \cdot 10^2$ mH

Aufgaben zu Abschnitt 2. 1. 4. (Multiplikation und Division von Potenzen unterschiedlicher Basen)

133) $3^2 \cdot 5^2$; $1{,}5^3 \cdot 2^3$; $2^4 \cdot 3{,}5^4$; $3{,}5^5 \cdot 4^5$.

134) $2{,}5^3 \cdot 4^2$; $4{,}8^2 \cdot 3^3$; $5^2 \cdot 2{,}5^3$; $4^2 \cdot 6^3$.

135) $\left(1\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3$; $\left(\frac{5}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$; $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(2\frac{1}{2}\right)^2$.

136) $1{,}5 \cdot 10^3 \cdot 5^3$; $2{,}8 \cdot 10^2 \cdot 3^2$; $1{,}5 \cdot 1{,}2^{-3} \cdot 5^{-3}$.

137) $4^3 : 2^3$; $4{,}5^4 : 1{,}5^4$; $9^3 : 1{,}5^3$; $7{,}5^5 : 2{,}5^5$.

138) $4^3 : 2^2$; $3^3 : 3^2$; $5^3 : 3^2$; $4^2 : 2^0$.

139) $\left(4\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$; $3{,}8^2 : 2^2$; $7{,}5^3 : 1{,}5^3$; $7{,}2^5 : 2{,}4^5$.

140) $(1{,}8 \cdot 10^4) : 2^4$; $5{,}7 \cdot 10^3 : 4^3$; $\dfrac{3{,}5 \cdot 10^6}{2{,}5^6}$; $\dfrac{4{,}5 \cdot 10^{-2}}{4^{-2}}$.

Aufgaben zu Abschnitt 2. 2. (Radizieren)

141) Ziehe die Wurzel aus den Quadratzahlen:
676; 2401; 6084; 123,21; 207,36; 13,3225.

142) Ziehe die Wurzel aus den beliebig gewählten Zahlen:
52,4; 72,56; 378; 4021.
(Die Berechnung kann im Resultat mit der zweiten Stelle nach dem Komma abgebrochen werden.)

143) Vereinfache und löse folgende Aufgaben:
$\sqrt[3]{27^6}$; $\sqrt[8]{169^4}$; $\sqrt[5]{7^{15}}$; $\sqrt[2]{10^6}$; $\sqrt[13]{a^{39}}$; $\sqrt[12]{b^3}$.

Aufgaben zu Abschnitt 3. 1. (Addition und Subtraktion unbestimmter Zahlen)

Addiere und subtrahiere — soweit möglich — die unbestimmten Zahlen!
(Alphabetische Reihenfolge beachten!)

144) $a + 2b - c$

145) $2a - 3b + c - 2ab$

146) $b + x - c + 2 - 3x$

147) $3a - 4b + 2a - 4b + a - b$

148) $3a - 9x + b - z + 4z + 7x - 5b$

149) $4a + ax - bz - 3a + 3ax$

150) $4 + 2ab - x + z - 3x - 3z$

151) $xy + 2a - 3xy - a + z$

152) $m - 3n + 7u^2 + 5m^2 + 7n - 3m - 4u^2$

153) $a^2 - 4a + 3b - c + b^2 + 4a^2 + 3a - 5c + b^2$

154) $x^2y - x^2 + y^2 - x - y + y^2x - x - y + x^2$

Aufgaben zu Abschnitt 3. 2. (Multiplikation und Division unbestimmter Zahlen)

Multipliziere die Brüche von allgemeinen Zahlen!
Denke daran: Kürzen!

155) $b \cdot \frac{1}{y}$; $x \cdot \frac{2}{z}$; $f \cdot \frac{x}{2}$; $p \cdot 1\frac{1}{2}z$.

156) $2t \cdot \frac{4x}{3}$; $4x \cdot \frac{1}{2}z$; $2 \cdot \frac{x}{2}z$; $4ax \cdot \frac{bx}{2}$.

157) $\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x}$; $\frac{b}{a} \cdot \frac{2z}{3}$; $\frac{x}{2} \cdot \frac{4}{a}$; $\frac{p}{2} \cdot \frac{a}{2p}$.

158) $2\frac{1}{4}x \cdot \frac{x}{4}$; $1\frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{4}x$; $\frac{x}{5z} \cdot \frac{2zx}{3} \cdot \frac{4ax}{3} \cdot \frac{9}{x}$.

Dividiere die Brüche von allgemeinen Zahlen!
Kürzen nicht vergessen!

159) $a : \frac{2}{x}$; $b : \frac{ax}{b}$; $\frac{c}{2} : ab$; $2ax : \frac{4}{3}$.

160) $4\frac{1}{2}bx : x^2$; $2\frac{1}{2} : \frac{4x}{2}$; $5b : \frac{ax}{b}$; $4x : \frac{1}{x}$.

161) $\frac{a}{x} : \frac{2z}{a}$; $\frac{2az}{x} : \frac{a}{2}$; $\frac{abx}{z} : \frac{bx}{a}$; $\frac{ax}{2} : \frac{x}{2a}$.

162) $1\frac{1}{2}ax : 2\frac{1}{4}ba$; $2\frac{1}{2} : \frac{5x}{4}$; $\frac{2ax}{3} : \frac{1}{x^2}$; $\frac{x^2}{4} : \frac{2}{ax}$.

Multipliziere die mehrgliedrigen Ausdrücke mit einem Faktor!

163) $(a - z)\,7z$; $\left(z + \frac{1}{2}\right) 7\frac{3}{4}\,az$; $\left(\frac{a}{b} + \frac{x}{5}\right) 5ax$.

164) $\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b\right) 12x$; $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c\right)(-6)$.

165) $(ax^2 + 6x + c)\,(-4)$; $\left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 3\right) 5x^2$.

166) $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \frac{ab}{c}$; $(ax^2 + bx)\,\frac{x}{2}$.

167) $\left(\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} + \frac{3}{4}\right) \left(-\frac{1}{3x}\right)$; $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}\right) \frac{xy}{2}$.

168) $(4xy - a^2 + 2x) \left(-\frac{axz}{2}\right)$; $(-a + 3b - 5c)\,(-7ab)$.

Dividiere die Einzelwerte durch die mehrgliedrigen Ausdrücke!

169) $4\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{2} - a\right)$; $6x : \left(\frac{1}{x} + y\right)$; $15bx : \left(8\frac{1}{2}b + 3x - \frac{2}{5}b\right)$.

Dividiere die mehrgliedrigen Ausdrücke durch die Einzelwerte!

170) $(ax^2 - bx) : \frac{x}{2}$; $(3x^2 - 5x + 6) : \frac{3}{4}x$; $\left(\frac{1}{5}x^2 - a\right) : \frac{1}{a}$.

171) $\left(ab - \frac{1}{2}x\right) : \frac{a}{x}$; $\left(3b + \frac{2x}{3}\right) : \frac{1}{x}$; $\left(ab - \frac{1}{a}\right) : \frac{a}{2}$.

Aufgaben zu Abschnitt 3. 3. (Multiplikation und Division mehrgliedriger Ausdrücke)

Multipliziere die mehrgliedrigen Klammerausdrücke und vereinfache, wenn möglich!

172) $(6a - 7b)\,(-4c + 5d)$; $(-2b + 7c)\,(5a - 7)$.

173) $(-5x + 3y + 10z)\,(-5 + x)$; $(a - 6b - 4c)\,(-7 + b)$.

174) $(ax^2 + bx + z)\,(abx - z)$; $(ax + z)\,(-z + a)\,4x$.

175) $(a + 5)\,(a - 5)$; $(x + 1)\,(x - 1)$; $(9r - 2s)\,(9r + 2s)$; $(5a + 7b)\,(5a - 7b)$.

176) $(x + y)^2$; $(a + 3x)^2$; $\left(x + \frac{2}{3}y\right)^2$; $\left(x + \frac{3a}{2}\right)^2$.

177) $(5 - x)^2$; $\left(c - \frac{1}{2}\right)^2$; $(0{,}7x - y)^2$; $(2a - 5b)^2$.

178) $(a + b)^2 + (a - b)^2$; $(a + b + c)^2$; $(a - b + c)\,(a + b - c)$.

179) $(3a + 2b - 5c)^2$; $(a - b)^3$; $(a + b)\,(a - b)\,(a + b)$.

Dividiere die mehrgliedrigen Klammerausdrücke!

180) $(ax - bx) : (a - b)$; $(2a - 10) : (a - 5)$.

181) $(ax + a - bx - b) : (a - b)$; $(x^2 - 8ay^2 + 4axy - 2xy - 3xz + 6yz) : (x - 2y)$.

182) $(10ax + 8ay - 25bx - 20by) : (5x + 4y)$;

$$\frac{a^3b^2 - a^4b + a^3b - a^3c - a^2b^3 + a^2bc + ab^4 + ab^3 - 2ab^2c - abc + ac^2}{ab - a^2b + ab^2 - ac}.$$

183) $(3ax - 15ay - 9az + 2bx - 10by - 6bz) : (3a + 2b)$;

$$\frac{0{,}2x^2y + 0{,}3x^2a - 0{,}4xyz - 0{,}48xz - 0{,}6axz + 0{,}96z^2}{0{,}4x - 0{,}8z}.$$

Aufgaben zu Abschnitt 3. 4. (Zerlegen in Faktoren)

Klammere den gemeinsamen Faktor bzw. die gemeinsamen Faktoren aus!

184) $7a + 7x$; $3x - 3y$; $ab + ax$; $nx - px$.

185) $a^2 - a$; $x^2 + x$.

186) $ax - bx + dx$; $2ay + 3by - cy$; $ab + ax - ad$.

187) $ax - px + xy - x$; $15ab - 25b^2 + bx$.

188) $ab + bc - 5b + a - 2bc$; $xz - z + az + z + 2xz$.

189) $3z(x - y) - 5b(x - y)$; $b(x - y) - (x - y)$.

190) $ax + dx - cx - ay - dy + cy$; $np - up - mq - ur + mr + mp - nq + uq + nr$;
$3a^2 + 6ab - ac - 2bc$.

191) $12a^2 - 9ab$; $8ax + 20x^2$; $25ab - 5b^2$; $18ap - 6p^2$; $6xy - 2y$;
$3a - 6ab$; $6ax - 4ay - 9zx + 6zy + 15cx - 10cy$.

192) $a^2 + 2ab + b^2$; $x^2 - 2xp + p^2$; $n^2 - m^2$.

193) $16 + 8y + y^2$; $9y^2 + 6y + 1$; $x^2 - 1$.

Löse die Klammern auf, und addiere bzw. subtrahiere!

194) $4 + (5 - 3)$; $3 - (5 - 3)$; $3ax + b - (x - 3ax)$.

195) $4bx + z - (bx + z - 2)$; $a + (b - z) - (a + b) - (z + 1)$;
$ax - (bx - 1) - (ax + 1)$; $1z + (3 - 2) - (4 + 5)$.

196) $a + x - (a + b - x) - (x + a)$; $4a - (b + a) - (3a + b)$;
$4ax - (a + ax) - (ax + a) - (b + ax)$.

197) $3a \cdot 5b - (7a - 4) - (4b + a)(b - a)$;
$9ab^2 - 7ab(-a + 3b - 5c) - (4a^2b + 35abc)$.

Aufgaben zu Abschnitt 4. 1. (Gleichungen, die durch Addition und Subtraktion zu lösen sind)

Bestimme die Größe x als Zahlenwert!

198) $x + 7 = 12;$ $\quad x - 13 = 5;$ $\quad x - 8 = -5.$

199) $x - 3{,}8 = -7{,}8;$ $\quad 15{,}8 = 12 + x;$ $\quad x - 4\frac{1}{3} = -5\frac{1}{2}.$

200) $x - 8{,}4 = 0;$ $\quad 2{,}5 - x = 0;$ $\quad -x - 1{,}5 = 0.$

Löse die nachstehenden Gleichungen nach x auf!

201) $d - x = -g;$ $\quad x - v = w;$ $\quad a - b = -x.$

202) $x - 2 = -z;$ $\quad a = b - x;$ $\quad q = p - x.$

Aufgaben zu Abschnitt 4. 2. (Gleichungen, die durch Multiplikation und Division zu lösen sind)

Löse die Gleichungen durch Dividieren nach x auf!

203) $2x = 8;$ $\quad 3x = 32;$ $\quad -17 = -5x;$ $\quad 3x = -9.$

204) $7x = -5{,}6;$ $\quad 1\frac{3}{4}x = 14;$ $\quad 3\frac{1}{3}x = 9\frac{3}{8};$ $\quad 3\frac{2}{5}x = 34.$

205) $3x - 2{,}7 = 5;$ $\quad 8 - 7x = -13;$ $\quad 2{,}5 - 3{,}6x = 7{,}6.$

Löse die Gleichungen durch Dividieren nach x auf!

206) $ax = b + p;$ $\quad zx = a - y.$

207) $px - q = l;$ $\quad a = zx - p;$ $\quad i + tx = h.$

Löse die Gleichungen durch Multiplizieren nach x auf, und bestimme den Zahlenwert von x.

208) $\frac{x}{5} = 7;$ $\quad \frac{x}{4} = 12{,}5;$ $\quad \frac{3x}{4} = 4;$ $\quad \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}.$

209) $\frac{x}{0{,}3} = 0{,}12;$ $\quad \frac{x}{7} = -111;$ $\quad \frac{x}{-9} = -7;$ $\quad \frac{x}{-6} = +14.$

210) $\frac{8}{x} = \frac{1}{3};$ $\quad \frac{3}{4x} = -\frac{3}{4};$ $\quad \frac{7}{x} = 4a;$ $\quad \frac{20}{x} = 5.$

Löse die Gleichungen nach x auf!

211) $\frac{x}{8} = a;$ $\quad \frac{2a}{x} = 5b;$ $\quad \frac{c}{px} = rs;$ $\quad \frac{ax}{b} = cd.$

Löse die Gleichungen durch Punkt- und Strichrechnung nach x auf!

212) $40 = \frac{35 - x}{0{,}5};$ $\quad \frac{x - 22{,}5}{0{,}8} = 3;$ $\quad \frac{45}{x} + 7 = 12;$ $\quad 24 - \frac{95}{x} = 6.$

Stelle die Formeln nach den gesuchten Größen um!

213) $v = \frac{s}{t}$ Bestimme s und t!

214) $N = \frac{I^2}{R}$ Bestimme I und R!

215) $G = V \cdot \gamma$ Bestimme V und γ!

216) $A = 860 \cdot N \cdot t \cdot \eta$ Bestimme N, t und η!

217) $W = \frac{Q}{2 \cdot x}$ Bestimme Q und x!

218) $F = \frac{G \cdot v^2}{g \cdot r}$ Bestimme G, g, v und r!

Aufgaben zu Abschnitt 4. 3. (Gleichungen, die die Unbekannte in mehreren Gliedern enthalten)

Löse nachfolgende Gleichungen durch Ausklammern nach x auf!

219) $4x + 2x - 5 = 21$; $ax + 9x - t = r$.

220) $9x - 2x + 15 = -20$; $16x - 20 = 5 + 5x$.

221) $4 + 15x = 8x - 27$; $15x - 40 = 8x + 9$.

222) $x - 4x - 27 = 0$; $60x + 30 = 24x - 70$.

223) $ax - cx = -g$; $tx - cx = q$; $px + ax = c - d$.

224) $px - p = rx - r$; $ax - m = bx - x$.

Bestimme die gesuchte Größe als positiven Ausdruck!

225) $P_2 = Q_1 + Q_2 - P_1$ Bestimme P_1 !

226) $-N_2 l + P_1 + P_2 - P_3 = 0$ Bestimme N_2!

227) $R_x + R_x \cdot z = \frac{1}{y}$ Bestimme R_x!

228) $ax + bx - z = -x + \frac{a}{2}$ Bestimme x, a und z!

Aufgaben zu Abschnitt 4. 4. (Gleichungen mit Klammern)

Beseitige bei den nachfolgenden Aufgaben erst die Klammern (Vorzeichen beachten!), und bringe dann die Unbekannte x auf die linke Seite der Gleichung!

229) $8x - (36 - x) = x + 4 \cdot (3 - x)$

230) $5 \cdot (x - 8) - 14 = (36 - x) \cdot 4$

231) $y(2x - a) + z(3b - x) = a + b(y + z) + zx$

Aufgaben zu Abschnitt 4. 5. (Gleichungen mit Brüchen)

Bestimme die Unbekannte x!

232) $\frac{1}{3}x + x = 4;$ $\quad 4x - \frac{1}{2} = \frac{x}{4};$ $\quad \frac{3}{4}x + \frac{5}{8}x = 21.$

233) $-7\frac{1}{8}x + 6 = \frac{1}{8}x;$ $\quad 1\frac{1}{6} - 12\frac{1}{2} = \frac{1}{3}x;$ $\quad \frac{4}{5}x + 7 = 1\frac{1}{2}x.$

234) $\frac{3x-8}{5} = \frac{5}{3a-8};$ $\quad \frac{5+x}{2} = \frac{1-x}{3}.$

Die gesuchte Größe muß auf der linken Seite der Gleichung allein stehen. Suche die einfachste Ausdrucksform des Ergebnisses!

235) $P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{R-x}{R}$ Bestimme R und Q!

236) $R = \frac{x(1+at)}{p}$ Bestimme x und p!

Aufgaben zu Abschnitt 4. 6. (Gleichungen mit Potenzen und Wurzeln)

Bestimme die Unbekannte x, indem zunächst der Potenzwert alleingestellt (isoliert) und durch Radizieren beseitigt wird!

237) $x^2 + 16 = 65;$ $\quad x^2 + 10x + 25 = 9 \cdot 16;$

$x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9} - \frac{3}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12};$

$x^2 - a^2 - 4a = 12 + 37 - 3x^2 + 10a.$

238) $x^2 + 1 = (x-1)^2 + 3;$ $\quad (x-3)^2 = 2(x+1) - (x+4)^2 + 31;$

$(x+5)^2 + (x-6)^2 + 1 = (x-40)(-2);$

$(x+q) = \frac{p(p-2q)}{x-q}.$

Bestimme die Unbekannte x, indem zunächst der Wurzelausdruck durch Potenzieren beseitigt wird.

239) $\sqrt{x} = 5;$ $\quad \sqrt[3]{x} = 7;$ $\quad \sqrt{x} = a.$

240) $\sqrt[3]{x} = b;$ $\quad \sqrt[4]{x} = 3;$ $\quad \sqrt[5]{x} = 2.$

241) $\sqrt{x+4} = 3;$ $\quad \sqrt{5-x} = 2;$ $\quad \sqrt[3]{x-3} = 3.$

242) $\sqrt{x-a} = b;$ $\quad \sqrt[3]{a-x} = z;$ $\quad 2 \cdot \sqrt{x} = 3.$

243) $\frac{1}{2}\sqrt{ax} = 5a;$ $\quad \frac{3}{4}\sqrt{x-5} = 4;$ $\quad \sqrt{4x-4} = 8.$

244) $2\sqrt{3x+4} = 8;$ $\quad \frac{2}{3}\sqrt{99-x} = 4.$

245) $7 - \sqrt{x} = 4;$ $\quad 7 - 3\sqrt{x} = 1.$

246) $8 + 3\sqrt{x-7} = 11;$ $\quad \sqrt{a-x} = az.$

Aufgaben zu Abschnitt 5. 1. und 5. 2. (Produktengleichung; Beispiele der Anwendung von Proportionen)

Bestimme den Wert der gesuchten Größe x!

247) $42 : 15 = 28 : x$; $1{,}2 : x = 6 : 0{,}5$.

248) $x : 76 = 45 : 57$; $87 : 58 = x : 36$.

249) $4x : 96 = 21 : 72$; $150 : x = 5 : 64$.

250) $x : y = a : b$; $R_1 : R_2 = \frac{x}{R_3}$.

251) $P : Q = h : x$; $(60 - 3x) : x = 5 : 3$.

252) $M_1 : M_2 = a : x$; $\frac{a}{b} : \frac{b}{c} = c : x$.

253) Säure und Wasser verhalten sich in einer Mischung wie 1 : 1,75. Die Säuremenge entspricht 2,5 l. Welche Menge Wasser befindet sich in der Mischung? Wieviel Liter umfaßt die Mischung?

254) Blei und Zinn verhalten sich in einer Legierung wie 11 : 4. Welches Gewicht hat der Zinnanteil, wenn der Anteil des Bleis 2,5 kg beträgt?

255) Gegeben sind zwei Freileitungsdrähte aus Runddraht von gleichem Material und gleicher Drahtlänge, aber ungleichem Drahtdurchmesser, mit den Widerständen R_1 und R_2.

Das Verhältnis der Widerstandswerte $\frac{R_1}{R_2}$ ist $\frac{20}{45}$.

Welche Verhältnisgleichung läßt sich zwischen den Größen R_1, R_2 und d_1, d_2 aufstellen?

In welchem Verhältnis stehen die Drahtdurchmesser d_1 und d_2 zueinander?

Wie groß ist der Drahtdurchmesser d_1 des Drahtes mit dem Widerstand R_1, wenn der Draht mit dem Widerstand R_2 einen Drahtdurchmesser $d_2 = 2\,\text{mm}$ besitzt?

3. **Buchstabenrechnen** (Algebra)

Neben den bisher verwendeten **bestimmten** Zahlen wie 3, 4, 5, 25, $7^1/_8$ usw. gibt es noch **allgemeine oder unbestimmte Zahlen,** die durch Buchstaben wie a, x, z usw. ausgedrückt werden und beim Rechenvorgang **jede beliebige Zahl bedeuten** können.

Für das Rechnen mit **unbestimmten Zahlen** haben auch die bisher für **bestimmte Zahlen** erarbeiteten **Regeln** gleiche **Gültigkeit.** Sie müssen jedoch durch weitere Regeln ergänzt werden.

3. 1. Addition und Subtraktion unbestimmter Zahlen

Beispiele

$$2a + a = \underline{\underline{3a}},$$
$$3a - 2a = \underline{\underline{a}};$$

keine Lösung möglich: $$3a - 2b = \underline{\underline{3a - 2b}};$$

Teillösung: $$3a - 2b + a + 5 - b = \underline{\underline{4a - 3b + 5}}.$$

Die Reihenfolge der Glieder in Summen und Differenzen kann **beliebig** geändert werden, jedoch müssen die jeweiligen Vorzeichen erhalten bleiben. Im allgemeinen werden die Buchstabengrößen alphabetisch und nach ihren Hochzahlen geordnet.

Beispiel $$a - 4b + c = a + c - 4b.$$

3. 2. Multiplikation und Division unbestimmter Zahlen

Für die Multiplikation und Division von ganzen **unbestimmten Zahlen** und von Brüchen mit unbestimmten Zahlen gelten **die gleichen Regeln** wie für **bestimmte Zahlen.**

Beispiele

$$a \cdot \frac{x}{2} = \underline{\underline{\frac{ax}{2}}}, \qquad a : \frac{x}{2} = a \cdot \frac{2}{x} = \underline{\underline{\frac{2a}{x}}},$$

$$b \cdot \frac{2}{x} = \underline{\underline{\frac{2b}{x}}}, \qquad 2z : \frac{2}{a} = 2z \cdot \frac{a}{2} = \frac{\cancel{2}az}{\cancel{2}} = \underline{\underline{az}},$$

$$2x \cdot \frac{x}{y} = \underline{\underline{\frac{2x^2}{y}}}; \qquad \frac{x}{4} : 2 = \frac{x}{4} \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{x}{8}}};$$

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{8}{a} = \frac{8x}{2a} = \underline{\underline{\frac{4x}{a}}}, \qquad \frac{a}{x} : \frac{2}{z} = \frac{a}{x} \cdot \frac{z}{2} = \underline{\underline{\frac{az}{2x}}},$$

$$\frac{2}{z} \cdot \frac{z}{y} = \frac{2\cancel{z}}{\cancel{z}y} = \underline{\underline{\frac{2}{y}}}, \qquad 2\frac{1}{4}p : \frac{1}{x} = 2\frac{1}{4}p \cdot \frac{x}{1} = \underline{\underline{2\frac{1}{4}px}}.$$

$$4\frac{1}{2}z \cdot \frac{x}{2} = \frac{9z}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{9xz}{4} = \underline{\underline{2\frac{1}{4}xz}};$$

Für die Multiplikation und Division von unbestimmten Zahlen in Form von Einzelwerten oder in Form von mehrgliedrigen Ausdrücken (Summen und Differenzen) gelten besondere Regeln.

> Man multipliziert einen **mehrgliedrigen** Ausdruck mit einem **Faktor,** indem man **jedes einzelne Glied** des Ausdrucks mit dem Faktor **multipliziert.**

Beispiele

$$(a + x) \cdot 7 = \underline{\underline{7a + 7x}},$$

$$\left(\frac{a}{2} + z\right) \cdot b = \underline{\underline{\frac{ab}{2} + bz}},$$

$$\frac{x}{2} \cdot \left(1 + \frac{2}{z}\right) = \frac{x}{2} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}z} = \underline{\underline{\frac{x}{2} + \frac{x}{z}}},$$

$$x \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \underline{\underline{\frac{x}{y} + \frac{x}{z}}}.$$

> Eine **algebraische Größe** (Einzelwert oder mehrgliedriger Ausdruck) wird durch eine algebraische Größe **dividiert,** indem man **den Divisor unter den Bruchstrich** setzt oder den Dividenden **mit dem Kehrwert des Divisors multipliziert.**
>
> Ist der **Dividend ein mehrgliedriger Ausdruck,** wird **jedes Glied** des mehrgliedrigen Ausdrucks **durch** den **Divisor geteilt.**

Beispiele

$$a : b = \underline{\underline{\frac{a}{b}}},$$

$$n : (a + x) = \underline{\underline{\frac{n}{a + x}}},$$

$$\frac{x}{2} : (a - b) = \underline{\underline{\frac{x}{2\,(a - b)}}};$$

$$(a - z) : a = \frac{a}{a} - \frac{z}{a} = \underline{\underline{1 - \frac{z}{a}}},$$

$$\frac{x}{2} : \frac{1}{c} = \frac{x}{2} \cdot \frac{c}{1} = \underline{\underline{\frac{cx}{2}}};$$

$$\left(\frac{x}{8} - 2\right) : \frac{y}{4} = \left(\frac{x}{8} - 2\right) \cdot \frac{4}{y} = \frac{4x}{8y} - \frac{2 \cdot 4}{y} = \underline{\underline{\frac{x}{2y} - \frac{8}{y}}},$$

$$(4x - 2z) : 2x = \frac{4x}{2x} - \frac{2z}{2x} = \underline{\underline{2 - \frac{z}{x}}};$$

$$(ab + x) : (y + z) = \underline{\underline{\frac{ab + x}{y + z}}},$$

$$(2m - 3n) : \frac{1}{bc} = (2m - 3n) \cdot \frac{bc}{1} = bc\,(2m - 3n) = \underline{\underline{2bcm - 3bcn}}.$$

3. 3. Multiplikation und Division mehrgliedriger Ausdrücke

> Die **Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke** erfolgt, indem man **jedes Glied** des **ersten** Ausdruckes **mit jedem Glied** des **zweiten** Ausdruckes **multipliziert.**

Sollen mehrgliedrige Ausdrücke miteinander multipliziert oder dividiert werden, so kann nach folgenden Beispielen verfahren werden:

Beispiele

$$(a + b) \cdot (c + d) = \underline{\underline{ac + ad + bc + bd}},$$

$$(a + c) \cdot (b - c) = \underline{\underline{ab - ac + bc - c^2}},$$

$$(2a - b) \cdot (b - a) = 2ab - 2a^2 - b^2 + ab = \underline{\underline{3ab - 2a^2 - b^2}}.$$

Sind **mehrgliedrige Ausdrücke durch mehrgliedrige Ausdrücke** zu **dividieren,** empfiehlt es sich, zuerst die einzelnen Glieder zu ordnen. Dann wird das erste Glied des ersten Ausdruckes durch das erste Glied des zweiten Ausdruckes dividiert ①. Mit dem sich daraus ergebenden Quotienten werden sämtliche Glieder des zweiten Ausdruckes multipliziert, das Ergebnis unter den ersten Ausdruck geschrieben ② und von diesem subtrahiert ③. Ergibt sich beim Multiplizieren ein Produkt, das im ersten Ausdruck **nicht vorhanden** ist, dann muß es **von Null abgezogen** werden, d. h. es erscheint mit **umgekehrtem Vorzeichen** in der neuen Zeile. Danach wird wieder das erste Glied — gegebenenfalls das zweite Glied — des Ergebnisses der ersten Subtraktion ③ durch das erste Glied des zweiten Ausdruckes dividiert ④ und so fort ⑤, ⑥ . . . ⑨, bis alle Glieder des ersten Ausdruckes erfaßt sind.

Beispiele

$$(3ab - 2a^2 - b^2) : (b - a) = 3a - b - a = \underline{\underline{2a - b}};$$

$$\begin{array}{rl}
 & ① \\
-\,(3ab - 3a^2) & ② \\
\hline
1a^2 - b^2 & ③\ ④ \\
-\,(-b^2 + ab) & ⑤ \\
\hline
a^2 - ab & ⑥\ ⑦ \\
-\,(a^2 - ab) & ⑧ \\
\hline
0 & ⑨
\end{array}$$

(vgl. Beispiel der Multiplikation mehrgliedriger Ausdrücke)

$$(x^3 + 3x^2 - 14x + 8) : (x - 2) = \underline{\underline{x^2 + 5x - 4}};$$

$$\begin{array}{rl}
 & ① \\
-\,(x^3 - 2x^2) & ② \\
\hline
5x^2 - 14x & ③\ ④ \\
-\,(5x^2 - 10x) & ⑤ \\
\hline
-4x + 8 & ⑥\ ⑦ \\
-\,(-4x + 8) & ⑧ \\
\hline
0 & ⑨
\end{array}$$

$$(a^2 - b^2) : (a + b) = \underline{\underline{a - b}}.$$

$$\begin{array}{rl}
 & ① \\
-\,(a^2 + ab) & ② \\
\hline
-b^2 - ab) & ③\ ④ \\
-\,(-b^2 - ab) & ⑤ \\
\hline
0 & ⑥
\end{array}$$

3. 4. **Zerlegen in Faktoren** (Ausklammern)

Multipliziert man eine Zahl mit einem mehrgliedrigen Ausdruck, so entsteht eine Summe von Produkten, z. B.

$$a\,(b - x) = \underline{\underline{ab - ax}}.$$

Diese **Rechenoperation** kann man aber auch **in umgekehrter Richtung** ausführen:

Wenn die **Produkte** — die die Summe bilden — einen **gemeinsamen Faktor** haben, können die Produkte durch diesen Faktor dividiert werden. Damit aber der Wert des algebraischen Ausdrucks erhalten bleibt, muß der **gemeinsame Faktor** dann **vor die Summe** gesetzt werden. Da der Faktor für jedes Glied des algebraischen Ausdrucks gilt, muß die Summe in **Klammern** gesetzt werden.

Beispiele

$$ab - ax \qquad \text{gemeinsamer Faktor} = a$$
$$= \underline{\underline{a\,(b - x)}};$$
$$bx + cb \qquad \text{gemeinsamer Faktor} = b$$
$$= \underline{\underline{b\,(c + x)}};$$
$$25 + 30 \qquad \text{gemeinsamer Faktor} = 5$$
$$= \underline{\underline{5\,(5 + 6)}}.$$

Da bei diesem Rechenvorgang der **gemeinsame Faktor ausgeklammert** wird, wird diese Rechenoperation **»Ausklammern«** genannt. Auch ist die Bezeichnung **»Zerlegen in Faktoren«** üblich, weil eine **Summe in zwei Faktoren** zerlegt wird.

Ein algebraischer Ausdruck kann aber als **gemeinsamen Faktor** wiederum eine **Summe** haben; dann ist diese Summe auszuklammern und in Klammern zu setzen.

Beispiele

$$\begin{aligned} & axy + bxy + ayz + byz \\ = \; & xy\,(a + b) + yz\,(a + b) \\ = \; & (a + b)\,(xy + yz) \\ = \; & \underline{\underline{(a + b)\,(x + z)\,y}} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & a^2 + ab + ac - az - bz - cz \\ = \; & a\,(a + b + c) - z\,(a + b + c) \\ = \; & \underline{\underline{(a - z)\,(a + b + c)}}. \end{aligned}$$

Bei diesem Ausklammern müssen die **Vorzeichen** besonders sorgfältig beachtet werden.

Steht vor einer Klammer nur ein **Minuszeichen**, so sind alle Vorzeichen in der Klammer umzudrehen. Man kann sich an Stelle des Minuszeichens eine »—1« gesetzt denken, dann würden alle Glieder des nachfolgenden algebraischen Ausdrucks mit »—1« zu multiplizieren sein. Dabei ist jedoch zu beachten, daß ein fehlendes Vorzeichen mit einem positiven Vorzeichen »+« gleichzusetzen ist.

Beispiel

$$(3 - 4 + 5) - (4 + 6 - 8) = 4 - 2 = 2$$
$$= 3 - 4 + 5 - 4 - 6 + 8 \qquad = \underline{\underline{2}}.$$

3. 5. Fragen zu Abschnitt 3 (Buchstabenrechnen — Algebra)

1. Was sind »allgemeine Zahlen«?
2. Gelten die üblichen Rechenregeln auch für das Buchstabenrechnen?
3. Kann man auch ungleichbenannte Größen addieren?
4. Wie multipliziert man mehrgliedrige Ausdrücke mit einem Faktor?
5. Wie multipliziert man einen mehrgliedrigen Ausdruck mit einem mehrgliedrigen Ausdruck?
6. Was ist beim Dividieren eines mehrgliedrigen Ausdrucks durch einen eingliedrigen Divisor zu beachten?
7. Welches Lösungsschema verwendet man beim Dividieren eines mehrgliedrigen Ausdrucks durch einen mehrgliedrigen Ausdruck?
8. Was versteht man unter »Ausklammern«?
9. Was ist besonders zu beachten, wenn eine Klammer aufgelöst wird, vor der ein Minuszeichen steht?

4. Gleichungen

Eine **Gleichung hat zwei Seiten,** die durch ein **Gleichheitszeichen** miteinander verbunden sind. Wie schon der Name sagt, wird durch das Gleichheitszeichen zum Ausdruck gebracht, daß auf der **rechten Seite** und auf der **linken Seite** der Gleichung **gleich große Werte** stehen.

Zum Beispiel $$28 + 8 = \underline{\underline{36}}\,.$$

Eine solche Gleichung läßt sich mit einer Waage vergleichen, die sich im **Gleichgewicht** befindet. Der Gleichgewichtszustand der Waage bleibt erhalten, wenn man auf beiden Seiten Gleiches vom Gewicht abzieht oder hinzufügt.

Eine **Gleichung bleibt** auch **erhalten,** d. h. das Gleichheitszeichen besteht zu Recht, wenn man **auf beiden Seiten** der Gleichung einen **gleichen Betrag abzieht** oder **hinzufügt** bzw. auf beiden Seiten mit der gleichen Größe **multipliziert** oder durch die gleiche Größe **dividiert.**

Beispiele

$$\begin{aligned} 28 + 8 - \mathbf{12} &= 36 - \mathbf{12} \\ &= \underline{\underline{24}}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 + 8 + \mathbf{7} &= 36 + \mathbf{7} \\ &= \underline{\underline{43}}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{4}\,(28 + 8) &= \mathbf{4} \cdot 36 \\ 112 + 32 &= \underline{\underline{144}}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{28 + 8}{\mathbf{3}} &= \frac{36}{\mathbf{3}} \\ \frac{28}{3} + \frac{8}{3} &= \underline{\underline{12}}\,. \end{aligned}$$

Außerdem kann man auf **beiden Seiten** einer Gleichung die **Wurzel ziehen** sowie auch beide Seiten **mit gleichem Exponenten potenzieren,** ohne daß das Gleichgewicht der Gleichung beeinflußt wird.

Beispiele

$$\begin{aligned} \sqrt{28 + 8} &= \sqrt{36} \\ &= \underline{\underline{6}}\,; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (28 + 8)^3 &= 36^3 \\ &= \underline{\underline{46\,656}}\,. \end{aligned}$$

Durch geschicktes Ausnützen dieser Möglichkeiten läßt sich eine in einer Gleichung vorhandene **unbekannte Größe »x« bestimmen.** Man bezeichnet diesen Rechenvorgang als das **»Auflösen«** einer Gleichung **nach der unbekannten Größe.**

Nachstehend wird das Auflösen von Gleichungen an verschiedenen Beispielen erläutert.

4. 1. Gleichungen, die durch Addition und Subtraktion zu lösen sind

1. Beispiel

$$x + 5 = 7 \qquad / -5$$

Die -5 nach dem Strich (/) hinter der Gleichung soll den Lösungsgang angeben. Im Beispiel soll auf beiden Seiten 5 subtrahiert werden.

$$x + 5 - 5 = 7 - 5$$
$$x = 7 - 5$$
$$\underline{\underline{x = 2}}\,.$$

Probe Für x wird das Ergebnis (hier 2) in die Ausgangsgleichung eingesetzt: $2 + 5 = 7$.

2. Beispiel

$$x - a = b \qquad / + a$$

Addiert man auf beiden Seiten der Gleichung »a«, dann bleibt links die gesuchte Größe allein stehen, und rechts ergibt sich »a + b«:

$$\underline{\underline{x = a + b}}\,.$$

Probe $a + b - a = b$.

4. 2. Gleichungen, die durch Multiplikation und Division zu lösen sind

1. Beispiel

$$5 \cdot x = 7 + 8 \quad / : 5$$

Werden beide Seiten der Gleichung durch »5« dividiert, dann bleibt links die gesuchte Größe x allein stehen und errechnet sich dann zu »3«:

$$\frac{5x}{5} = \frac{7 + 8}{5}$$
$$x = \frac{15}{5}$$
$$\underline{\underline{x = 3}}\,.$$

Probe $5 \cdot 3 = 7 + 8$.

2. Beispiel

$$ax = b + c \quad / : a$$
$$\underline{\underline{x = \frac{b + c}{a}}}\,.$$

Probe $\frac{\cancel{a}(b + c)}{\cancel{a}} = b + c$.

3. Beispiel

$$\frac{x}{6} = 12 \qquad / \cdot 6$$

Werden beide Seiten der Gleichung mit »6« multipliziert, dann bleibt x allein stehen und beträgt »72«:

$$\frac{x}{6} \cdot 6 = 12 \cdot 6$$
$$\underline{\underline{x = 72}}\,.$$

Probe $\frac{72}{6} = 12$.

4. Beispiel

$$px - q = t \qquad / + q$$
$$px = t + q \quad / : p$$
$$\underline{\underline{x = \frac{t + q}{p}}}\,.$$

Probe $\frac{\cancel{p}(t + q)}{\cancel{p}} - q = t$

$t + (q - q) = t$.

5. Beispiel

$$\frac{ax}{b} = c \qquad / \cdot b$$
$$ax = bc \qquad / : a$$
$$\underline{\underline{x = \frac{bc}{a}}}\,.$$

Probe $\frac{\cancel{a}}{\cancel{b}} \cdot \frac{\cancel{b}c}{\cancel{a}} = c$.

4. 3. Gleichungen, die die Unbekannte in mehreren Gliedern enthalten

1. Beispiel

$$\begin{aligned} 6x + 12 &= 103 - 7x && /\ + 7x \\ 6x + 7x + 12 &= 103 && /\ - 12 \\ 6x + 7x &= 103 - 12 && /\ \text{zusammenfassen!} \\ 13x &= 91 && /\ : 13 \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 7.}} \end{aligned}$$

Probe $6 \cdot 7 + 12 = 103 - 7 \cdot 7$

$42 + 12 = 103 - 49$

$54 = 54.$

2. Beispiel

$$\begin{aligned} 2a + b - 3d + x &= d - x && /\ + x \\ 2a + b - 3d + 2x &= d && /\ - (2a + b - 3d) \\ 2x &= d - (2a + b - 3d) \\ 2x &= d - 2a - b + 3d && /\ \text{zusammenfassen!} \\ 2x &= 4d - 2a - b && /\ : 2 \\ x &= \frac{4d - 2a - b}{2} \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 2d - a - \frac{b}{2}.}} \end{aligned}$$

Probe $2a + b - 3d + 2d - a - \frac{b}{2} = d - (2d - a - \frac{b}{2})$

$2a + b - 3d + 2d - a - \frac{b}{2} = d - 2d + a + \frac{b}{2}$

$a + \frac{b}{2} - d = a + \frac{b}{2} - d.$

> Sind **mehrere Glieder** der gesuchten Größe enthalten, so müssen diese **zusammengefaßt** werden.
>
> Es empfiehlt sich, auch die anderen Größen zusammenzufassen, sofern dies möglich ist.

4. 4. Gleichungen mit Klammern

1. Beispiel

$$\begin{aligned} 6x - (24 - 3x) &= x - (2x - 6) && /\ \text{Klammern auflösen!} \\ 6x - 24 + 3x &= x - 2x + 6 && /\ \text{x-Werte auf eine Seite bringen!} \\ 6x + 3x - x + 2x &= 6 + 24 && /\ \text{die Werte beider Seiten zusammenfassen!} \\ 10x &= 30 && /\ : 10 \\ x &= \frac{30}{10} \\ \underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 3.}} \end{aligned}$$

Probe $6 \cdot 3 - (24 - 3 \cdot 3) = 3 - (2 \cdot 3 - 6)$

$18 - 24 + 9 = 3 - 6 + 6$

$3 = 3.$

2. Beispiel

$$\begin{aligned} 7 \cdot (5x + 7) &= 119 && /\ \text{Klammer ausmultiplizieren!} \\ 35x + 49 &= 119 && /\ - 49 \\ 35x &= 119 - 49 && /\ \text{rechte Seite zusammenfassen!} \\ 35x &= 70 && /\ : 35 \\ \underline{\underline{x}} &= \frac{70}{35} = \underline{\underline{2.}} \end{aligned}$$

Probe $7 \cdot (5 \cdot 2 + 7) = 119$

$7 \cdot (10 + 7) = 119$

$7 \cdot 17 = 119.$

3. Beispiel

$$4x\,(5+z) = \frac{m}{4}$$
/ Klammer nur mit »4« ausmultiplizieren, damit »x« als Faktor isoliert bleibt!

$$x\,(20+4z) = \frac{m}{4}$$
/ : (20 + 4z)

$$x = \frac{m}{4\,(20+4z)}$$
/ Klammer im Nenner des Bruches ausmultiplizieren!

$$x = \frac{m}{80+16z}\,.$$

Probe

$$4\,\frac{m}{80+16z}\,(5+z) = \frac{m}{4}$$

$$\frac{\cancel{4}m\,\cancel{(5+z)}}{\underset{4}{\cancel{16}}\,\cancel{(5+z)}} = \frac{m}{4}$$

$$\frac{m}{4} = \frac{m}{4}$$

4. 5. Gleichungen mit Brüchen

1. Beispiel

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = 14$$
/ Hauptnenner suchen; Brüche erweitern!

$$\frac{4}{12}x + \frac{3}{12}x = 14$$
/ Brüche addieren!

$$\frac{7}{12}x = 14$$
/ $\cdot \frac{12}{7}$

$$x = 14 \cdot \frac{12}{7}$$

$$x = 24\,.$$

Probe

$$\frac{24}{3} + \frac{24}{4} = 14$$

$$8 + 6 = 14\,.$$

2. Beispiel

$$\frac{5+x}{2} + \frac{13+7x}{3} = 72$$
/ $\cdot$ 6

$$3\,(5+x) + 2\,(13+7x) = 72 \cdot 6$$
/ Klammern ausmultiplizieren!

$$15 + 3x + 26 + 14x = 432$$
/ Gleichung ordnen!

$$3x + 14x = 432 - 15 - 26$$
/ gleiche Werte zusammenfassen!

$$17x = 391$$
/ : 17

$$x = \frac{391}{17}$$

$$x = 23\,.$$

Probe

$$\frac{5+23}{2} + \frac{13+7\cdot 23}{3} = 72$$

$$\frac{28}{2} + \frac{174}{3} = 72$$

$$14 + 58 = 72\,.$$

4. 6. Gleichungen mit Potenzen und Wurzeln

1. Beispiel

$$x^2 + 12 = 16$$
/ — 12

$$x^2 = 16 - 12$$
/ rechte Seite zusammenfassen!

$$x^2 = 4$$
/ Quadratwurzel ziehen!

$$x = \sqrt{4}$$

$$x = \pm 2\,.$$
/ Beachte: Das Ergebnis einer Quadratwurzel kann sowohl positiv als auch negativ sein.

Probe

$$2^2 + 12 = 16$$

$$4 + 12 = 16\,.$$

2. Beispiel

$$x^2 + 12x + 36 = 169 \qquad \text{/ linke Seite in Faktoren zerlegen!}$$
$$(x+6)^2 = 169 \qquad \text{/ Quadratwurzel ziehen!}$$
$$\sqrt{(x+6)^2} = \sqrt{169}$$
$$x + 6 = \pm 13 \qquad / -6$$
$$x_1 = 13 - 6 \qquad x_2 = -13 - 6$$
$$\underline{\underline{x_1 = +7}}; \qquad \underline{\underline{x_2 = -19}}.$$

Probe für x_1

$$7^2 + 12 \cdot 7 + 36 = 169$$
$$49 + 84 + 36 = 169;$$

für x_2

$$(-19)^2 + 12(-19) + 36 = 169$$
$$361 - 228 + 36 = 169.$$

3. Beispiel

$$\sqrt{x+a} = b \qquad \text{/ mit 2 potenzieren!}$$
$$x + a = b^2 \qquad / -a$$
$$\underline{\underline{x = b^2 - a}}.$$

Probe
$$\sqrt{b^2 - a + a} = b$$
$$\sqrt{b^2} = b.$$

4. Beispiel

$$\sqrt[3]{5+2x} = 3 \qquad \text{/ mit 3 potenzieren!}$$
$$5 + 2x = 3^3 = 27 \qquad / -5$$
$$2x = 22 \qquad / :2$$
$$\underline{\underline{x = 11}}.$$

Probe
$$\sqrt[3]{5 + 2 \cdot 11} = 3$$
$$\sqrt[3]{5 + 22} = 3$$
$$\sqrt[3]{27} = 3.$$

5. Beispiel

$$4\sqrt{24-x} = a + 4 \qquad / :4$$
$$\sqrt{24-x} = \frac{a}{4} + 1 \qquad \text{/ mit 2 potenzieren!}$$
$$24 - x = \left(\frac{a}{4} + 1\right)^2 \qquad \text{/ rechte Seite ausmultiplizieren!}$$
$$24 - x = \frac{a^2}{16} + \frac{a}{2} + 1 \qquad / -24$$
$$-x = \frac{a^2}{16} + \frac{a}{2} + 1 - 24 \qquad / \cdot(-1)$$
$$x = 24 - 1 - \frac{a^2}{16} - \frac{a}{2}$$
$$\underline{\underline{x = 23 - \frac{a^2}{16} - \frac{a}{2}}}.$$

Probe
$$4\sqrt{24 - \left(23 - \frac{a^2}{16} - \frac{a}{2}\right)} = a + 4$$
$$4\sqrt{24 - 23 + \frac{a^2}{16} + \frac{a}{2}} = a + 4$$
$$4\sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + 2\frac{a}{4} + 1} = a + 4$$
$$4\sqrt{\left(\frac{a}{4} + 1\right)^2} = a + 4$$
$$4\left(\frac{a}{4} + 1\right) = a + 4$$
$$a + 4 = a + 4.$$

4. 7. Fragen zu Abschnitt 4 (Gleichungen)

1. Wieviele Seiten hat eine Gleichung?
2. Was wird durch das Gleichheitszeichen zum Ausdruck gebracht?
3. Mit welchem Gerät läßt sich eine Gleichung verständlich erklären?
4. Wann bleibt eine Gleichung erhalten?
5. Wie kann in einer Gleichung eine vorhandene unbekannte Größe bestimmt werden?
6. Wie bezeichnet man den Rechenvorgang, der aus einer Gleichung eine unbekannte Größe bestimmt?
7. Welcher Rechenschritt ist zuerst auszuführen, wenn eine Gleichung die Unbekannte in mehreren Gliedern enthält?

5. **Proportionen** *) (Verhältnisgleichungen)

Vergleicht man zwei Zahlen miteinander, z. B. 16 und 4, so kann man zunächst ihre Differenz (16 — 4) und dann auch ihr Größenverhältnis (16:4) feststellen. In der Praxis werden solche Verhältnisbetrachtungen häufig angestellt. So kann z. B. interessieren, wie sich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Anzahl der Kraftwagen in Hamburg zu der Anzahl der Kraftwagen in Lübeck verhielt (225 000 : 75 000). Zum besseren Verständnis könnte man noch ausführlicher sagen:

»Die Anzahl der Kraftwagen in Hamburg und in Lübeck verhielt sich **wie 225 000** (Kraftwagen) **zu 75 000** (Kraftwagen).«

Das Verhältnis 225 000 : 75 000 läßt sich auch einfacher ausdrücken. Beide Zahlen lassen sich z. B. durch 75 000 kürzen, so daß sich ein vereinfachtes, leichter zu begreifendes **Verhältnis 3 : 1** ergibt. Die beiden Verhältnisse sind gleichwertig und können auch gleichgesetzt werden:

$$225\,000 \text{ Kfz} : 75\,000 \text{ Kfz} = 3 : 1.$$

Diese letzte Zeile wird gelesen: 225 000 Kraftwagen verhalten sich zu 75 000 Kraftwagen wie 3 : 1.

Eine solche **Verhältnisgleichung** bezeichnet man als **Proportion.** An die Stelle des Doppelpunktes kann auch ein Bruchstrich gesetzt werden:

$$\frac{225\,000 \text{ Kfz}}{75\,000 \text{ Kfz}} = \frac{3}{1}.$$

5. 1. **Produktengleichungen**

Im allgemeinen lautet eine Verhältnisgleichung (Proportion):

$$\boxed{\mathbf{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} : \mathbf{d}}$$

a und ***b*** bezeichnet man als die Vorderglieder, ***c*** und **d** als die Hinterglieder; **a** und **d** als Außenglieder und ***b*** und ***c*** als Innenglieder. Die **Proportion**

$$27 : 21 = 9 : 7$$

oder, anders geschrieben,

$$\frac{27}{21} = \frac{9}{7}$$

kann man wie andere Gleichungen **umformen.** Werden die **Außenglieder** der Verhältnisgleichung miteinander und ebenfalls die **Innenglieder** miteinander **multipliziert,** so erhält man eine **Produktengleichung**

$$27 \cdot 7 = 21 \cdot 9.$$

Umgekehrt kann man aber auch eine Produktengleichung in eine Verhältnisgleichung umformen

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{d} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \quad \text{(Produktengleichung)}$$

$$\text{in } \mathbf{a} : \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} : \mathbf{d} \quad \text{(Verhältnisgleichung)}$$

$$\text{oder in } \frac{\mathbf{a}}{\boldsymbol{b}} = \frac{\boldsymbol{c}}{\mathbf{d}} \quad \text{(einfache Bruchgleichung).}$$

Die Regeln für das Lösen von Gleichungen gelten auch für Proportionen.

Ist in einer Verhältnisgleichung eine Größe unbekannt, so kann man diese Größe durch Umformen errechnen. Die Rechenarbeit kann u. U. erleichtert werden, indem man die Verhältnisgleichung zunächst in eine Produktengleichung umwandelt.

*) »Proportion« aus dem Lateinischen = »Größenverhältnis«; in der Mathematik wird damit die »Verhältnisgleichheit« bezeichnet.

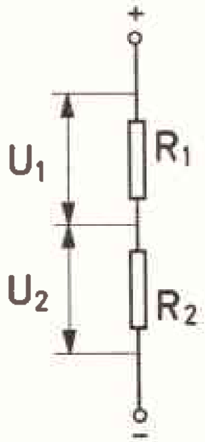
5. 2. Beispiele der Anwendung von Proportionen zum Bestimmen von Größen der Fernmeldetechnik

1. Beispiel (Reihenschaltung von Widerständen)

Wird eine Reihenschaltung von Widerständen vom Strom durchflossen, so entstehen an diesen Widerständen Teilspannungen (Spannungsabfälle). Diese **Teilspannungen** (U_1, U_2) verhalten sich zueinander **wie** die **Widerstände** (R_1, R_2), an denen sie abfallen*).

Abb. 10
Reihenschaltung von Widerständen

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}$$



Rechenbeispiel

Gegeben:

$U_2 = 50\,\text{V}$
$R_1 = 60\,\Omega$
$R_2 = 100\,\Omega$

Gesucht:

$U_1 = ?\,\text{V}$
$U_{Ges} = ?\,\text{V}$

Lösung

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad | \cdot U_2$$

$$\underline{\underline{U_1}} = \frac{R_1 \cdot U_2}{R_2} = \frac{60 \cdot 50}{100} = \frac{\overset{30}{\cancel{60}} \cdot \cancel{50}}{\underset{2}{\cancel{100}}} = \underline{\underline{30\,\text{V}}}.$$

$$\underline{\underline{U_{Ges}}} = U_1 + U_2 = 30 + 50 = \underline{\underline{80\,\text{V}}}$$

oder (andere Lösungsmöglichkeit zur Probe)

$$\frac{U_{Ges}}{U_2} = \frac{R_{Ges}}{R_2}$$

$$\underline{\underline{U_{Ges}}} = \frac{R_{Ges} \cdot U_2}{R_2} = \frac{\overset{80}{\cancel{160}} \cdot \cancel{50}}{\underset{2}{\cancel{100}}} = \underline{\underline{80\,\text{V}}}.$$

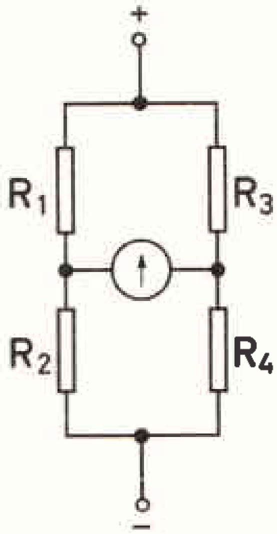
*) Näheres hierzu siehe Lernblätter F — Elektrotechnik (Gleichstromlehre).

2. Beispiel (Meßbrückenschaltung)

Eine stromdurchflossene Meßbrücke ist abgeglichen, wenn das Verhältnis der Widerstände R_1 und R_2 gleich dem Verhältnis der Widerstände R_3 und R_4 ist*).

Abb. 11
Brückenschaltung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$



Rechenbeispiel

Gegeben:

$R_1 = 54\,\Omega$

$R_2 = 81\,\Omega$

$R_3 = 10\,\Omega$

Gesucht:

$R_4 = \,?\,\Omega$

Lösung

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$$ / Verhältnisgleichung in Produktengleichung umformen! Dabei gesuchtes R_4 auf linke Seite bringen.

$$R_1 \cdot R_4 = R_3 \cdot R_2$$ / $: R_1$

$$\underline{\underline{R_4}} = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1} = \frac{10 \cdot 81}{54} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{81}}}{\underset{2}{\cancel{54}}} = 5 \cdot 3 = \underline{\underline{15\,\Omega}}.$$

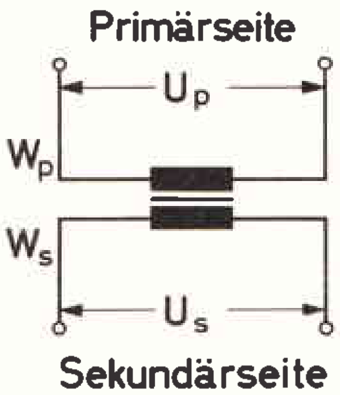
*) Näheres hierzu siehe Lernblätter F — Elektrotechnik (Gleichstromlehre).

3. Beispiel (Übersetzungsverhältnis beim Transformator)

Das Übersetzungsverhältnis ($\ddot{U}$) eines Transformators wird durch das Windungsverhältnis der Primärseite (W_p) zur Sekundärseite (W_s) bestimmt. Im gleichen Verhältnis hierzu stehen auch die (Leerlauf-)Spannungen (U_p, U_s), die im eingeschalteten Zustand des Transformators transformiert werden*).

Abb. 12
Übersetzungsverhältnis beim Transformator

$$\ddot{U} = \frac{W_p}{W_s} = \frac{U_p}{U_s}$$



Rechenbeispiel

Gegeben:

$U_p = 200$ V

$U_s = 60$ V

$W_p = 300$ Windungen

Gesucht:

$W_s = ?$ Windungen

Lösung

$$\frac{W_p}{W_s} = \frac{U_p}{U_s}$$

/ Verhältnisgleichung in Produktengleichung umformen! Dabei gesuchte Größe W_s auf linke Seite bringen!

$$U_p \cdot W_s = W_p \cdot U_s$$

/ : U_p

$$\underline{\underline{W_s}} = \frac{U_s \cdot W_p}{U_p} = \frac{60 \cdot 300}{200} = \frac{\overset{30}{\cancel{60}} \cdot \overset{3}{\cancel{300}}}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{200}}} = 30 \cdot 3 = \underline{\underline{90\ \text{Windungen}}}.$$

*) Näheres hierzu siehe Lernblätter F — Elektrotechnik (Gleichstromlehre und Wechselstromlehre).

5. 3. Fragen zu Abschnitt 5 (Proportionen, Verhältnisgleichungen)

1. Was versteht man unter einer Verhältnisgleichung?
2. Wie benennt man die Glieder einer Proportion?
3. Durch welche Rechenoperation erhält man aus einer Verhältnisgleichung eine Produktengleichung?
4. Welchen einfachen Merksatz kann man als Rechenregel aufstellen, wenn man aus einer Proportion die unbekannte Größe bestimmen möchte?
5. Nenne Beispiele aus der Praxis der Fernmeldetechnik, bei denen das Rechnen durch Anwendung von Proportionen vereinfacht wird!
6. Bei einer Stromverzweigung (Parallelschaltung von Widerständen) verhalten sich die Ströme umgekehrt proportional zu den Widerständen. Stelle die Proportion auf für eine Parallelschaltung von drei Widerständen (R_1, R_2, R_3) für die drei Teilströme (I_1, I_2, I_3)!

6. Graphische Darstellungen*)

Graphische Darstellungen haben den Zweck, **Zahlenwerte und Vorgänge** — meist in Gegenüberstellungen — dem Betrachter **bildlich zu veranschaulichen.** Dazu bedient man sich verschiedener Methoden, von denen einige nachfolgend gezeigt werden sollen.

6. 1. Darstellen vergleichbarer Größen durch Bilder

Abb. 13 zeigt bildlich, wie groß der **Unterschied in der Anzahl von Fernsprechanschlüssen** ist, die in zwei verschiedenen Jahren (1955, 1960) eingerichtet worden sind.

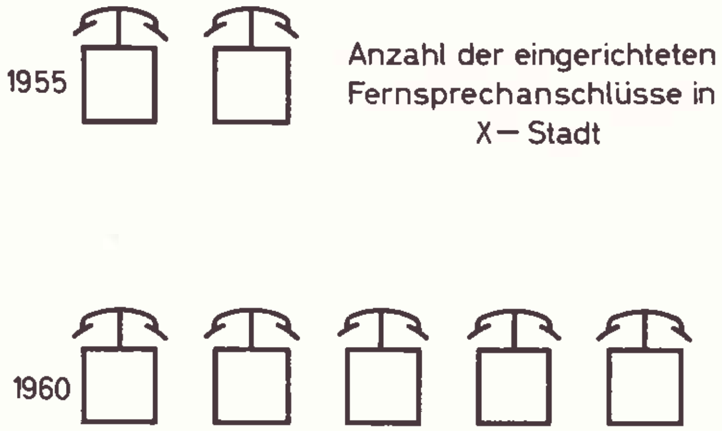


Abb. 13
Darstellen von Größen durch Bildzeichen

Die bildliche Darstellung zeigt anschaulicher als Zahlen (z. B. **2** (10) gegenüber **5** (25)), daß sich die Anzahl der eingerichteten Hauptanschlüsse im Jahre 1960 gegenüber dem Jahre 1955 mehr als verdoppelt hat.

Der Überblick über die Entwicklung der Fernsprechanschlüsse könnte noch gesteigert werden, wenn nicht nur die Jahre 1955 und 1960, sondern alle Jahre von 1955 bis 1960 berücksichtigt werden würden.

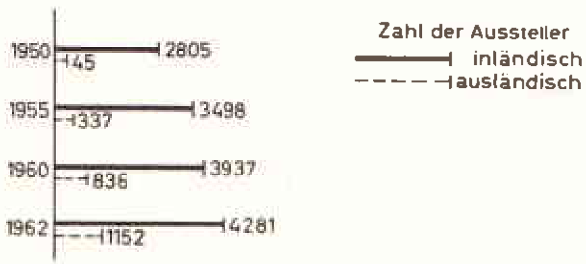
6. 2. Darstellen vergleichbarer Größen durch Strecken

In Abb. 13 wurde das reine Zahlenverhältnis 2 : 5 ausgedrückt, ohne Rücksicht auf die wahren Zahlengrößen selbst.

Ein solches Zahlenverhältnis kann man auch durch **verhältnisgleiche Längen** zweier **Strecken,** wie es Abb. 14 zeigt, wiedergeben.

Um einen besseren optischen Eindruck zu vermitteln, kann die Strichausführung unterschiedlich gewählt werden (hier: Vollinie und Strichlinie).

Abb. 14
Darstellen von Größen durch Strecken



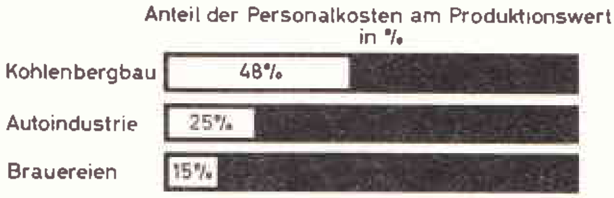
Dieses Beispiel ermöglicht nicht nur einen Vergleich der inländischen und ausländischen Aussteller in Abhängigkeit von den Ausstellungsjahren, sondern gestattet zusätzlich einen Vergleich zwischen den Ausstellern (nach inländischen und ausländischen Ausstellern) innerhalb eines Jahres.

*) »graphisch« aus dem Griechischen: »die Schreibkunst betreffend«, heute oft im Sinne »die Drucktechnik, die Schreib- und Zeichenkunst betreffend« angewendet; hier: »Graphische Darstellung« = »Schaubild zur Veranschaulichung von Zahlen und Vorgängen«.

6. 3. Darstellen vergleichbarer Größen durch Flächen

Das Beispiel in Abb. 15 zeigt den Anteil der Personalkosten am Produktionswert in verschiedenen, ausgewählten Industriezweigen. Es ist ersichtlich, daß die Personalkosten in den verschiedenen Industriezweigen einen bestimmen, **unterschiedlichen Prozentsatz** des Produktionswertes ausmachen. Die zu vergleichenden Größen sind in Prozenten angegeben und **dann als Flächen dargestellt,** ohne daß die absoluten Größen — d. h. die Kosten in DM — angegeben sind. Die Prozentsätze sind hier die vergleichbaren Größen.

Abb. 15
Darstellen von Größen durch Flächen



Anstatt der **Rechteckflächen** können auch eine **Kreisfläche,** die in entsprechende Sektoren **aufgeteilt** wird, oder perspektivisch dargestellte Quadern oder Rund- bzw. Rechtecksäulen verwendet werden.

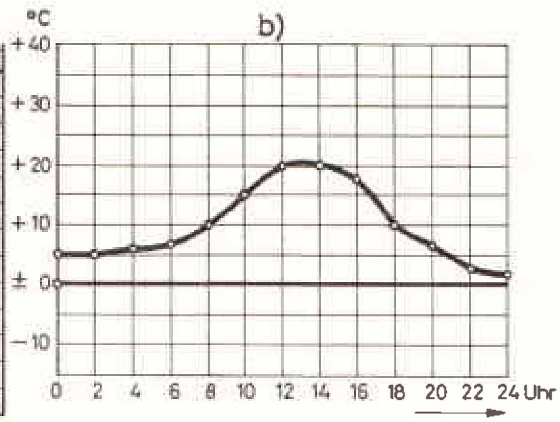
6. 4. Darstellen vergleichbarer Größen durch Schaulinien

In einer Wetterwarte wurde an einem Tag zwischen 0 und 24 Uhr alle 2 Stunden die Temperatur der Luft tabellarisch registriert (Abb. 16).

Abb. 16
Darstellen von Größen durch Schaulinien

a)

Uhr	°C
0	5
2	5
4	6
6	7
8	10
10	15
12	20
14	20
16	18
18	10
20	7
22	3
24	2



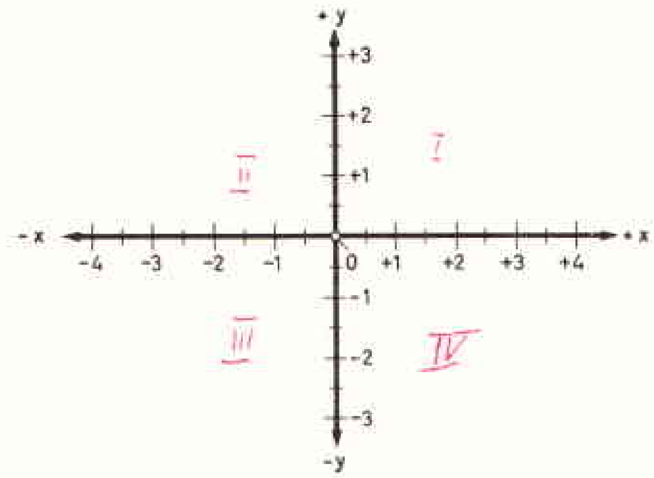
Eine Schaulinie oder Kurve, die die Abhängigkeit der Temperatur von der Tageszeit zeigt, ergibt sich, wenn die gemessenen Temperaturwerte als senkrechte Strecken über der jeweiligen Tageszeit aufgetragen und deren Endpunkte dann miteinander verbunden werden.

6. 5. Darstellen der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen im Koordinatenfeld

Im Beispiel der Abb. 16 wurde die Abhängigkeit der Temperatur von der Tageszeit durch eine Schaulinie gezeigt. In der Technik und in der Mathematik wird häufig graphisch dargestellt, wie **zwei Größen voneinander abhängig** sind. Die **Darstellungsfläche** wird durch **zwei senkrecht aufeinanderstehende Achsen** (Koordinaten) in **vier Felder** (Quadranten) aufgeteilt. Die **senkrechte Koordinate** bezeichnet man als **Ordinate** (auch als y-Achse!), die **waagrechte** als **Abszisse** (auch als x-Achse!).

Die Abb. 17 zeigt ein solches Achsenkreuz mit den Ordinatenwerten y und den Abszissenwerten x.

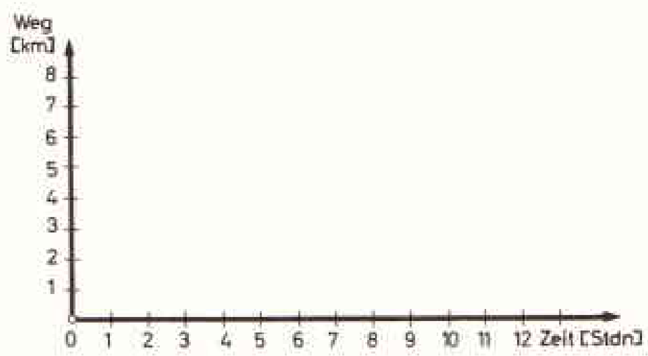
Abb. 17
Koordinatenkreuz (Achsenkreuz)



Mit Hilfe dieser Koordinaten, in x- bzw. y-Werte eingeteilt, kann die **Lage eines** von beiden Werteskalen abhängigen **Punktes** in der Zeichenebene **festgelegt** werden. Ebenso läßt sich z. B. die Abhängigkeit des zurückgelegten Weges von der Zeit (oder einer Stromstärke von der Zeit) darstellen. Die Verbindung dieser Meßpunkte ergibt dann eine Linie, wie sie in dem vorangegangenen Beispiel (Abb. 16) zu sehen ist.

Liegen die **Meßwerte nur im ersten Quadranten,** dann kann auf das Achsen**kreuz** verzichtet werden, und man verwendet **nur die positiven Achsen.** Neben der Angabe, welche Größen dargestellt werden sollen, ist auch die **Angabe der zugehörigen Maßeinheiten** erforderlich, wie es aus Abb. 18 (mit den Beispielen »Weg in km« und »Zeit in Stdn«) hervorgeht.

Abb. 18
Die Koordinaten des 1. Quadranten



1. Beispiel

Ein Unimog legt in der Stunde in gleichmäßig schnellem Schleichgang 2 km zurück; seine Fahrt wird dabei über 4 Stunden ausgedehnt. Der zurückgelegte Weg läßt sich graphisch in Abhängigkeit von der Zeit darstellen und ist dann aus einem sogenannten Zeit-Weg-Diagramm (Abb. 19) zu ersehen.

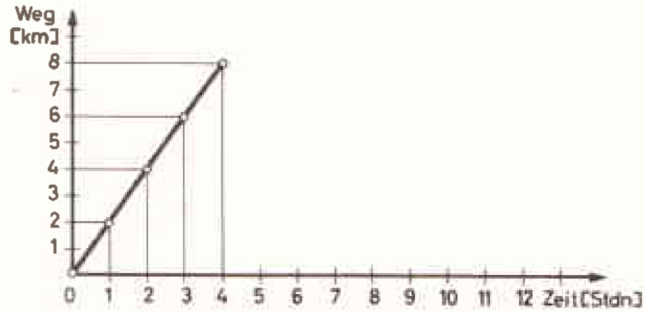


Abb. 19
Zeit-Weg-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung

In dem **geraden Verlauf** der Linie des Zeit-Weg-Diagramms kommt zum Ausdruck, daß die Geschwindigkeit des Unimogs **gleichbleibend** oder **gleichförmig** war.

2. Beispiel

Ein Bergsteiger dehnt eine Bergwanderung über 8 Stunden aus. Dabei legt er in den beiden ersten Stunden in gleichmäßig schnellem Aufstieg 3 km zurück. In der dritten Stunde bewältigt er auf günstigerer Strecke weitere 2 km. Dann legt er eine Rast von einer Stunde ein. In den folgenden 2 Stunden steigt er noch einmal 3 km, in den beiden letzten Stunden wandert er nur noch 2 km.

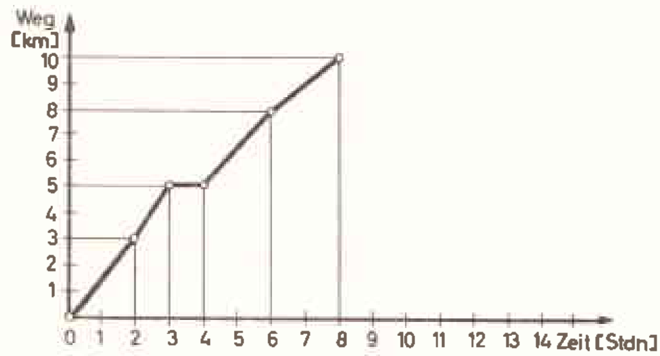


Abb. 20
Zeit-Weg-Diagramm einer ungleichförmigen Bewegung

Bei diesem Beispiel ist der von dem Bergsteiger in der Stunde zurückgelegte Weg unterschiedlich; seine Bewegung ist **ungleichförmig.** Die Schaulinie in Abb. 20 gibt diesen Bewegungsverlauf eindeutig durch einen geknickten Verlauf der Linie wieder.

6. 6. Fragen zu Abschnitt 6 (Graphische Darstellungen)

1. Erkläre den Zweck graphischer Darstellungen!
2. Gib Möglichkeiten der Darstellung von Größen durch Bildzeichen an!
3. Wann wird man vergleichbare Größen durch Strecken darstellen?
4. Welche Möglichkeiten gibt es, vergleichbare Größen durch Flächen darzustellen?
5. Wie kann man Temperaturschwankungen aufzeichnen?
6. Wie nennt man eine Darstellung, die die Abhängigkeit von zwei Größen zeigt?
7. Wie nennt man die senkrechte und die waagrechte Achse eines Koordinatenkreuzes?
8. Worin unterscheiden sich ein Zeit-Weg-Diagramm und ein Geschwindigkeitsdiagramm?
9. Nenne einige Vorgänge aus der Elektrotechnik, die man in einem Diagramm darstellen kann!

7. Raumlehre (Geometrie)

Die Raumlehre behandelt folgende Begriffe:

Punkt, Linie, Winkel, Fläche und Körper.

Der **Punkt** hat **keine Ausdehnung.** Er ist nur eine gedachte Stelle im Raum. Um den Punkt auf Zeichnungen sichtbar zu machen, wird er als Schnittpunkt zweier Linien dargestellt und mit einem Buchstaben bezeichnet.

Bewegt sich ein Punkt in einer Richtung fort, so entsteht eine Linie

Die **Linie** hat **eine** Ausdehnung, die **Länge.**

Die **Fläche** hat **zwei** Ausdehnungen, die **Länge** und die **Breite.**

Der **Körper** hat **drei** Ausdehnungen, die **Länge,** die **Breite** und die **Höhe.**

Die **Ausdehnungsmöglichkeiten** werden auch **Dimensionen***) genannt.

Der **Winkel** ist die **Neigung,** unter der zwei sich schneidende Linien verlaufen. Er wird in Grad (°)**) gemessen (vgl. 7. 2.).

Diese wesentlichen Begriffe der Geometrie sollen nachfolgend näher erklärt werden.

7. 1. Die Linie

Es gibt gerade und gekrümmte Linien.

Bei den **geraden Linien** unterscheidet man

die **Gerade** (eine nach **beiden Seiten unbegrenzte** Linie),
den **Strahl** (eine nach **einer Seite begrenzte** Linie),
die **Strecke** (eine nach **beiden Seiten begrenzte** Linie).

Abb. 21
Arten der geraden Linien

Gekrümmte Linien haben in jedem Punkt eine andere Richtung. Sie unterscheiden sich im wesentlichen nach ihren Grundarten in

Bogen — Ellipse — Kreis.

Abb. 22
Arten der gekrümmten Linien

*) »Dimension« aus dem Lateinischen: »Ausdehnung« eines Gebildes.

**) Der 90°-Winkel, der »Rechte«, kann auch in 100 Winkeleinheiten [in sog. Neugrade (^{g})] eingeteilt werden.

1 Altgrad (°) = 1,111 Neugrad (^{g}).
1 Neugrad (^{g}) hat 100 Neuminuten (^{c}),
hat 10 000 Neusekunden (^{cc}).
1 Neuminute (^{c}) hat 100 Neusekunden (^{cc})!
$1^g = 100^c = 10\,000^{cc}$.

7. 2. Der Winkel

Wenn zwei Gerade sich in einem Punkt schneiden, dann bilden sie einen Winkel. Die **Geraden** nennt man die **Schenkel,** den **Schnittpunkt** den **Scheitelpunkt** des Winkels.

Die **Größe eines Winkels** wird von der **Neigung der Schenkel** zueinander bestimmt und in **Grad** (°) gemessen. Diese Maßeinheit »Grad (°)« zum Bestimmen eines Winkels kann weiter in **kleinere Einheiten** unterteilt werden, und zwar in

Minuten (′) $\rightarrow 1° = 60'$ und in

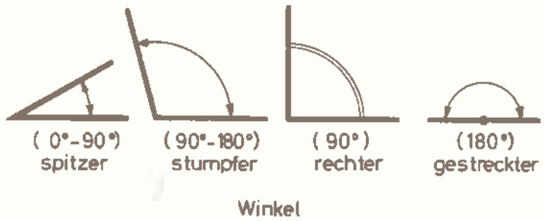
Sekunden (″) $\rightarrow 1' = 60''$; $1° = 60 \cdot 60 = 3\,600''$.

Die Winkel werden nach ihrer Größe folgendermaßen eingeteilt:

Spitze Winkel zwischen 0° und 90°

Stumpfe Winke zwischen 90° und 180°

Abb. 23
Winkelbezeichnungen



Bei dieser Einteilung ergeben sich zwei Sonderfälle:

Der häufig vorkommende Winkel von **90°** hat die Bezeichnung **rechter Winkel** erhalten;

der Winkel von **180°** wird **gestreckter Winkel** genannt.

Dreht sich ein Strahl, der vom Mittelpunkt eines Kreises ausgeht, einmal um diesen Mittelpunkt, so überstreicht er einen Winkel von 360°. Dem Kreis ist also ein Mittelpunktswinkel von 360° zugeordnet.

7. 3. Die Fläche

Werden Flächen von geraden Linien begrenzt, so unterscheiden sich diese nach der Zahl der gebildeten Ecken (z. B. Dreieck, Viereck, Fünfeck).

Flächen, die von gekrümmten Linien begrenzt werden, haben eigene Bezeichnungen (z. B. Kreisfläche — Ellipsenfläche).

In der Raumlehre ist — neben der zeichnerischen Konstruktion — das **Berechnen der Flächen** besonders wichtig. Die Formel für die Flächenberechnung ist beim Viereck am einfachsten zu finden.

7. 3. 1. Das Viereck

Man unterscheidet bei den Vierecken:

Rechteck und Quadrat
Rhombus und Rhomboid
Trapez und Trapezoid

Das **Rechteck** hat — wie sein Name schon sagt — vier rechte Winkel (jeder Eck-Winkel mißt 90°). Durch diese gleich großen Eck-Winkel bedingt, hat das Rechteck paarweise gleich lange Seiten, d. h., die sich gegenüberliegenden Seiten sind gleich lang.

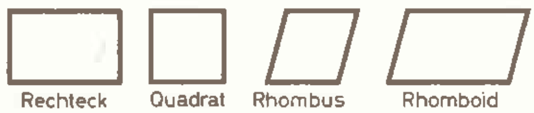
Das **Quadrat**[1]) ist eine Sonderform des Rechtecks, bei ihm sind alle vier Seiten gleich lang, sie stehen ebenfalls rechtwinklig zueinander.

Der **Rhombus**[2]) hat — wie das Quadrat — vier gleich lange Seiten, die aber nicht mehr senkrecht zueinander stehen. Die sich gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß. Man nennt diese Form des Vierecks auch Raute.

Das **Rhomboid**[3]) hat — wie das Rechteck — nur paarweise gleich lange Seiten, die aber nicht mehr senkrecht zueinander stehen. Auch bei diesem Viereck sind die sich gegenüberliegenden Winkel gleich groß.

Diese vier vorstehenden Viereckarten sind **Parallelogramme**[4]), weil die jeweils **sich gegenüberliegenden Seiten** zueinander **parallel** sind; die sich gegenüberliegenden Winkel sind gleich groß. In Abb. 24 sind diese Parallelogrammarten dargestellt.

Abb. 24
Parallelogrammarten



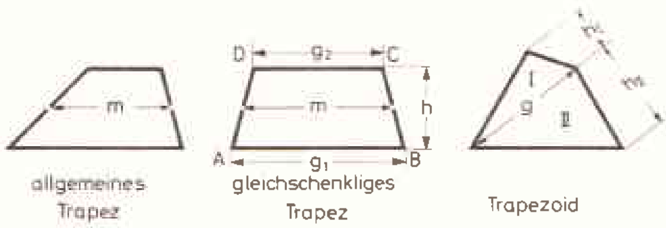
Das **Trapez**[5]) ist ein Viereck, bei dem **nur zwei** sich **gegenüberliegende Seiten** zueinander **parallel,** aber **nicht gleich lang** sind.

Eine **Sonderform** des Trapezes ist das **gleichschenklige Trapez,** bei dem die **nichtparallelen Seiten gleich lang** sind. Bei ihm sind die einer der parallellaufenden Seiten zugeordneten Winkel gleich groß.

Das **Trapezoid**[6]) ist ein Viereck allgemeiner Art, es hat **keine parallelen Seiten, beliebige Winkel** und **beliebige Seitenlängen.** Die Bezeichnung »Trapezoid« wird selten angewendet.

Die Trapezarten sind in Abb. 25 dargestellt.

Abb. 25
Trapezarten



1) »Quadrat« aus dem Lateinischen: »Gleichseitiges Rechteck«.
2) »Rhombus« von der lateinischen Sprache der griechischen entlehnt: »Schiefwinkliges Parallelogramm mit gleich langen Seitenpaaren«.
3) »Rhomboid« von der lateinischen Sprache der griechischen entlehnt: »Schiefwinkliges Parallelogramm mit ungleichen Seitenpaaren«.
4) »Parallelogramm« von der lateinischen Sprache der griechischen entlehnt: »Viereck, welches von zwei Paaren paralleler Seiten begrenzt ist«.
5) »Trapez« aus dem Griechischen: »Viereck mit zwei ungleich langen parallelen Seiten«.
6) »Trapezoid« aus dem Griechischen: »Viereck ohne parallele Seiten«.

In jedem Viereck beträgt die **Summe aller** Eck-**Winkel 360°**.

Die **Fläche eines Rechteckes** wird einfach dadurch bestimmt, indem man seine beiden Ausdehnungen miteinander multipliziert:

$$\text{Fläche}_{\textit{eines Rechtecks}} = \text{Länge mal Breite}$$

$$\boxed{A_{\textit{Rechteck}} = a \cdot b} \; *)$$

Da bei einem **Quadrat** alle vier Seiten gleich lang sind, sind auch die beiden Ausdehnungen (Länge und Breite) gleich groß, und man kann schreiben

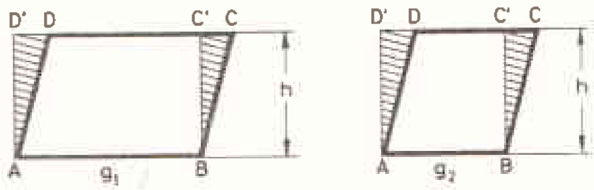
$$\boxed{A_{\textit{Quadrat}} = a \cdot a = a^2}$$

Aus der Formel für die Berechnung der Fläche eines Quadrates ergibt sich auch die **Maßeinheit,** mit der eine Fläche gemessen wird. Es ist der Quadratmeter (m^2):

$$1\,m^2 = 100\,dm^2 = 10000\,cm^2 = 1000000\,mm^2 \text{ usw.};$$
$$1000000\,m^2 = 1\,km^2$$
$$100\,m^2 = 1\,a^{**})$$
$$10000\,m^2 = 100\,a = 1\,ha^{***})$$

Will man die **Fläche eines Rhombus** oder eines Rhomboides berechnen, so kann die Fläche dieser Parallelogramme in Gedanken in ein Quadrat oder in ein Rechteck umgewandelt werden, wie es Abb. 26 zeigt:

Abb. 26
Berechnung der Fläche eines Rhomboides



In den Ecken A und B wird je eine Senkrechte errichtet. Wird die Strecke C—D über D hinaus verlängert, so ergeben sich zwei Schnittpunkte C' und D'. C' und D' sind die Ecken eines Rechtecks — oder eines Quadrats — (A, B, C', D'), das die gleich große Fläche hat wie das ursprüngliche Rhomboid — oder der Rhombus —, weil die versetzten Dreiecke B, C, C' und A, D, D' einander gleich sind.

Somit ergibt sich die Fläche des Rhomboides zu

$$\boxed{A_{\textit{Rhomboid}} = g \cdot h}$$

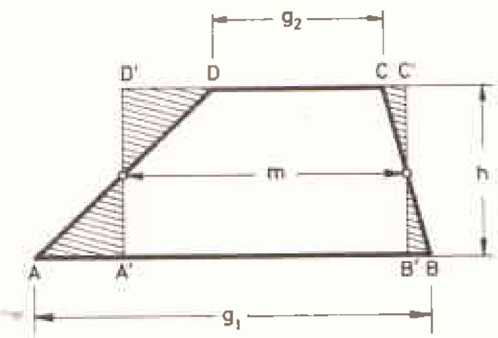
Allgemein gilt für das Berechnen von Parallelogrammen die Flächenformel

$$\boxed{A_{\textit{Parallelogramm}} = g \cdot h}$$

wobei Rechteck und Quadrat nur Sonderformen des Parallelogramms sind.

Beim **Trapez** (Abb. 25) sind die Grundlinien unterschiedlich lang. Hier hilft man sich, indem man wie beim Berechnen eines Rhomboides die Fläche in Gedanken in ein Rechteck umwandelt (Abb. 27):

Abb. 27
Berechnung der Fläche eines Trapezes



*) A = Fläche (aus dem Englischen: »Area«, sprich »Äriə«).
**) a = Abkürzung für »Ar«; Flächenmaß.
***) ha = Abkürzung für »Hektar«; Flächenmaß.

Aus der Verbindungslinie der Mittelpunkte der nichtparallelen Seiten ergibt sich eine **mittlere Grundlinienlänge** m, die sich auch aus den beiden parallelen Seiten g_1 und g_2 errechnen läßt:

$$m = \frac{g_1 + g_2}{2}.$$

Werden Lote durch die beiden Mittelpunkte auf die Grundlinie g_1 (Strecke $A - B$) gefällt, so ergibt sich ein Rechteck A', B', C', D', welches flächengleich mit dem Trapez ist und sich errechnet zu:

$$\boxed{A_{Trapez} = m \cdot h = \frac{g_1 + g_2}{2} \cdot h}$$

Das **Trapezoid** zerlegt man — wie in Abb. 25 angedeutet — für die Berechnung seiner Fläche durch eine **Diagonale** so **in zwei Dreiecke** (I und II), daß g eine Hilfs-Grundlinie bildet. Die Fläche des Trapezoides berechnet sich aus der **Summe der Flächen der beiden Dreiecke***):

$$\boxed{\begin{aligned} A_{Trapezoid} &= \textit{Dreiecksfläche I} + \textit{Dreiecksfläche II}, \\ &= \frac{g \cdot h_I}{2} + \frac{g \cdot h_{II}}{2}, \\ &= \frac{g\,(h_I + h_{II})}{2}. \end{aligned}}$$

7. 3. 2. Das Dreieck

Es gibt

spitzwinklige, rechtwinklige, stumpfwinklige

und — in anderer Bewertung —

gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige

Dreiecke.

Im **rechtwinkligen Dreieck** heißen die beiden Seiten, die den rechten Winkel einschließen, **Katheten****) (a und b); die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heißt **Hypotenuse****) (c).

Die Ecken eines Dreiecks werden entgegen dem Uhrzeigersinn mit großen Buchstaben (A, B, C) bezeichnet. Die Seiten eines Dreiecks werden mit kleinen Buchstaben (a, b, c) benannt, und zwar sind sie in ihrer Bezeichnung jeweils der Ecke zugeordnet, der sie gegenüberliegen ($A \to a$; $B \to b$; $C \to c$). Die Winkel werden mit griechischen Buchstaben (α, β, γ) nach der Ecke bezeichnet, in der sie liegen.

Die **Summe der Winkel** eines Dreiecks ($\alpha + \beta + \gamma$) beträgt **180°**.

Für das Berechnen einer Dreiecksfläche sind ihre Grundlinie (g) und ihre Höhe (h) von Bedeutung. Die Abb. 28 zeigt verschiedene Dreiecke mit den Grundlinien g_1, g_2, g_3 und den zugehörigen Höhen h_1, h_2, h_3. Bei der Darstellung eines Dreiecks kann jede der drei Dreiecksseiten Grundlinie sein. Dementsprechend sind auch drei verschiedene Höhen möglich.

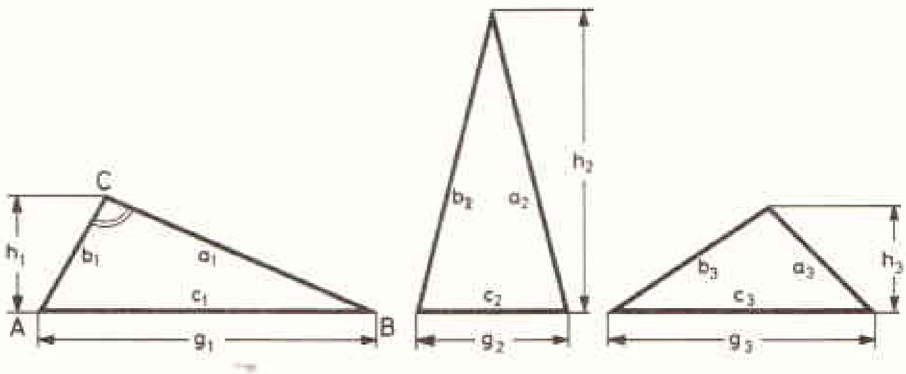


Abb. 28 Dreiecksformen

*) Vgl. Abschnitt 7. 3. 2.
**) Die Bezeichnungen »Kathete« und »Hypotenuse« wurden der griechischen Sprache entlehnt.

Um die **Formel zum Berechnen der Fläche eines Dreiecks** zu finden, empfiehlt es sich, das Dreieck — wie in Abb. 29 dargestellt — spiegelbildlich zu einer der Grundlinie gegenüberliegenden Seite so zu verdoppeln,

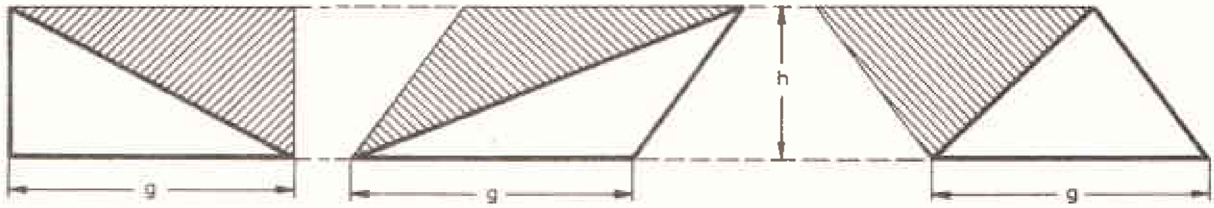


Abb. 29 Berechnung der Fläche eines Dreiecks

daß ein Parallelogramm entsteht. Aus den drei bildlichen Darstellungen ist ersichtlich, daß die **Dreiecksfläche halb so groß** ist **wie die Fläche des** so gefundenen **Parallelogramms.** Da die Fläche eines Parallelogramms nach der Formel $A = g \cdot h$ errechnet wird, folgt somit:

$$\boxed{A_{Dreieck} = \frac{g \cdot h}{2}}$$

Die **Fläche eines Dreiecks** wird also errechnet, indem man die **Grundlinie** und die **dazugehörige Höhe** miteinander **multipliziert** und das **Ergebnis durch 2 dividiert.**

Dreiecke mit gleicher Grundlinie und Höhe sind flächengleich (vgl. auch Abb. 29).

Die Formel zur Berechnung von Dreiecksflächen wird auch benötigt, um die Flächen regelmäßiger Vielecke zu berechnen, weil bei diesen Vielecken häufig ein sogenanntes **Bestimmungsdreieck** angegeben wird (vgl. Abschnitt 7. 3. 3.).

Von ganz besonderer Bedeutung für die Erklärung technischer und physikalischer Vorgänge ist das **rechtwinklige Dreieck.** Der griechische Philosoph und Mathematiker Pythagoras*) entdeckte am rechtwinkligen Dreieck die mathematischen Zusammenhänge zwischen dem Quadrat über der Hypotenuse und den Quadraten über den beiden Katheten. Diese Erkenntnis wurde ihm zu Ehren

Lehrsatz des Pythagoras

genannt. Dieser Lehrsatz lautet:

Bei einem Rechtwinkligen Dreieck ist der Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse gleich der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheden

Dieser Lehrsatz wird durch die Abb. 30 veranschaulicht.

*) Pythagoras lebte ungefähr von 580 bis 497 v. Chr.

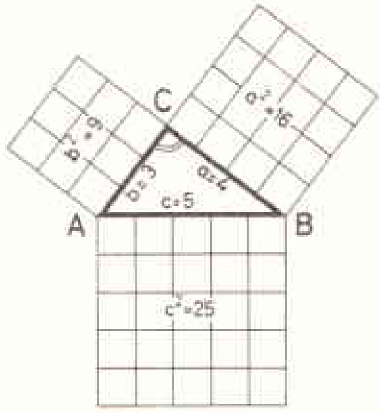


Abb. 30
Rechtwinkliges Dreieck mit den Quadraten über der Hypotenuse und über den beiden Katheten

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$25 = 16 + 9$$

In einer Formel ausgedrückt, lautet der Lehrsatz:

$$\boxed{A^2 + B^2 = C^2}$$

Wenn in einem rechtwinkligen Dreieck zwei Seiten bekannt sind, kann man daraus auch die dritte Seite bestimmen.

$$c^2 = a^2 + b^2, \qquad c = \sqrt{a^2 + b^2};$$
$$b^2 = c^2 - a^2, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2};$$
$$a^2 = c^2 - b^2, \qquad a = \sqrt{c^2 - b^2}.$$

Diese allgemein aus dem Lehrsatz des Pythagoras abzuleitenden Zusammenhänge spielen in der Wechselstromlehre eine wichtige Rolle, denn die Zusammenhänge zwischen den Wirk-, Blind- und Scheingrößen lassen sich mit Hilfe rechtwinkliger Dreiecke darstellen und entsprechend berechnen*).

Die Abb. 31 zeigt zum Beispiel die graphische Lösung zur Ermittlung des Scheinwiderstandes Z einer Reihenschaltung aus reellem Widerstand R, induktivem Widerstand X_L und kapazitivem Widerstand X_C.

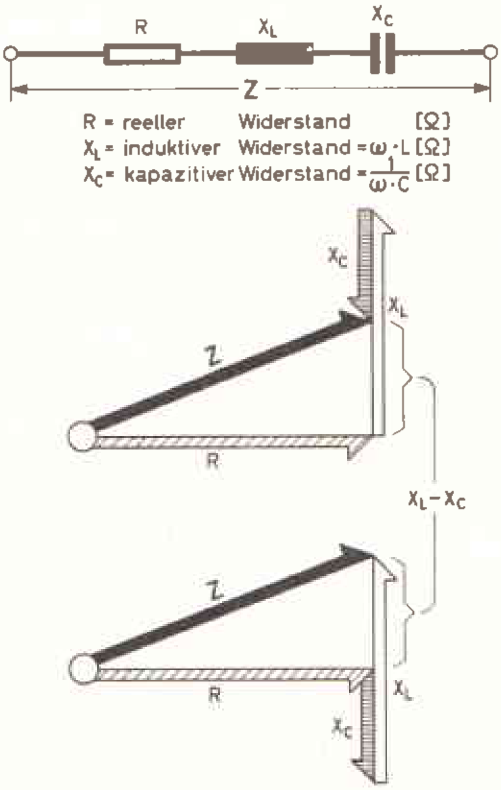


Abb. 31
Scheinwiderstand Z einer Reihenschaltung von R, L und C

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}\ \Omega$$

*) Näheres hierzu siehe Lernblätter F — Lehrstoff Elektrotechnik (Wechselstromlehre).

7. 3. 3. Die Vielecke

Es gibt regelmäßige und unregelmäßige Vielecke. Die Abb. 32 zeigt ein regelmäßiges und ein unregelmäßiges Vieleck.

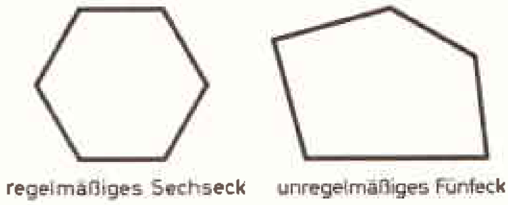


Abb. 32
Regelmäßiges und unregelmäßiges Vieleck

Ein regelmäßiges Vieleck (z. B. Sechseck) läßt sich in eine Anzahl gleich großer Flächen (Bestimmungsdreiecke) zerlegen, ein unregelmäßiges Vieleck in ungleichmäßige berechenbare Flächen. Der gesamte **Flächeninhalt** A eines **Vielecks** errechnet sich damit aus der **Summe** der Einzelflächen A_I, A_{II}, A_{III} usw.:

$$A = A_I + A_{II} + A_{III} \dots$$

Beispiel

Von einem regelmäßigen Sechseck, das von einem Kreis umschrieben ist, dessen Radius 36 mm beträgt, ist der Flächeninhalt in cm² zu bestimmen.

Auf Grund der Konstruktion ist der Radius des umgeschriebenen Kreises r gleich der Seite s des regelmäßigen Sechsecks. Das Bestimmungsdreieck ist ein gleichseitiges Dreieck, dessen drei Seiten $s = r$ lang sind.

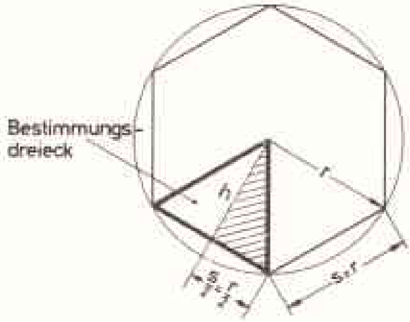


Abb. 33
Flächenberechnung bei einem regelmäßigen Sechseck

Um die Fläche des Bestimmungsdreiecks berechnen zu können, muß noch die Höhe h ermittelt werden. Die Höhe h ist in einem gleichseitigen Dreieck die Seitenhalbierende, sie teilt also das Bestimmungsdreieck in zwei gleich große Teile auf. Somit kann die Höhe h mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras berechnet werden.

$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2},$$

$$h = \sqrt{\frac{4}{4} r^2 - \frac{1}{4} r^2},$$

$$h = \sqrt{\frac{3}{4} r^2} = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4} r^2} = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2},$$

$$h = \frac{r}{2} \sqrt{3}.$$

Die Fläche des Bestimmungsdreiecks ist demnach

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{r}{2} \sqrt{3},$$

$$A_{Dreieck} = \frac{r^2}{4} \sqrt{3}.$$

Da das regelmäßige Sechseck sechs solche Bestimmungsdreiecke aufnimmt, ist seine Fläche

$$A_{Sechseck} = 6 \cdot \frac{r^2}{4} \sqrt{3};$$

$$\boxed{A_{Sechseck} = \frac{3r^2}{2} \sqrt{3}}$$

Wird der Wert $r = 36\,\text{mm}$ in die vorstehende Formel eingesetzt, folgt:

$$A_{Sechseck} = \frac{3 \cdot 36^2}{2} \sqrt{3} = \frac{3 \cdot \overset{648}{\cancel{1296}}}{\underset{1}{\cancel{2}}} \cdot 1{,}732;$$

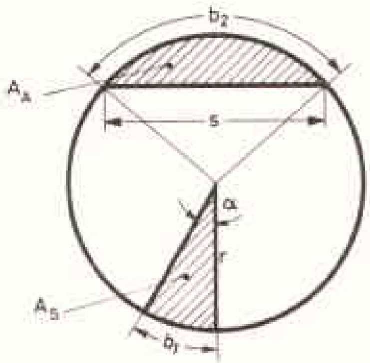
$$\underline{\underline{A_{Sechseck}}} = 3367\,\text{mm}^2 = \underline{\underline{33{,}67\,\text{cm}^2}}.$$

7.3.4. Der Kreis (Die Kreisfläche)

Unter einem **Kreis** versteht man eine **ebene Kurve**, deren Punkte von einem festen Punkt (Kreismittelpunkt) überall den gleichen Abstand haben. Die von dieser Kurve berandete Fläche nennt man **Kreisfläche.**

Die Abb. 34 zeigt eine Kreisfläche, in die ein Kreisausschnitt mit der Fläche A_S und ein Kreisabschnitt mit der Fläche A_A eingezeichnet sind.

Abb. 34
Kreisfläche mit Kreisausschnitt und Kreisabschnitt



Ein **Kreisausschnitt** (Sektor) ist ein Teil einer Kreisfläche, der **von zwei Halbmessern** (r) und **einem Kreisbogen** (b_1) **begrenzt** ist.

Ein **Kreisabschnitt** (Segment) ist ein Teil einer Kreisfläche, der **von einer Sehne** (s) und **einem Kreisbogen** (b_2) **begrenzt** ist.

Folgende Größen werden zum Bestimmen eines Kreises verwendet:

A = Fläche
U = Kreisumfang
d = Durchmesser
r = Radius (Halbmesser)
π = Ludolphsche Zahl (= 3,14...)
s = Sehne
b = Bogen

Kreisumfang:

$U = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$

Kreisfläche:

$A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

Der Kreissektor

Die Fläche des Kreissektors (vgl. Fläche A_S in Abb. 34) ist einfach zu berechnen, wenn der Radius des Kreises und der Winkel des Sektors bekannt sind. Es verhält sich die Fläche des Kreissektors A_S zur gesamten Kreisfläche A_K wie der Winkel α des Sektors zu 360°, dem gesamten Mittelpunktswinkel des Kreises:

$$\frac{A_S}{A_K} = \frac{\alpha}{360};$$

$$A_S = A_K \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

Beträgt beispielsweise bei einem Kreis mit dem Radius $r = 4\,\text{cm}$ der Sektorwinkel $\alpha = 52°$, dann ergibt sich die Sektorfläche zu:

$$A_S = A_K \cdot \frac{52}{360},$$

$$A_S = r^2 \cdot \pi \cdot \frac{52}{360} = 4^2 \cdot \frac{52}{360} \cdot \pi = \frac{\overset{2}{\cancel{16}} \cdot 52}{\underset{45}{\cancel{360}}} \cdot \pi = \frac{326{,}56}{45},$$

$$\underline{\underline{A_S = 7{,}257\,\text{cm}^2}}.$$

Der Kreisbogen b des Sektors läßt sich ebenfalls auf einfache Weise mit einer Verhältnisgleichung bestimmen.

$$\frac{b}{U} = \frac{\alpha}{360},$$

$$b = U \cdot \frac{\alpha}{360},$$

$$b = 2r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360} = r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{180}.$$

Werden die Werte des vorstehenden Beispiels ($r = 4\,\text{cm}$, $\alpha = 52°$) eingesetzt, folgt:

$$\underline{\underline{b}} = 4 \cdot \pi \cdot \frac{\overset{13}{\cancel{52}}}{\underset{45}{\cancel{180}}} = \frac{4 \cdot 13}{45} \cdot \pi = \underline{\underline{3{,}628\,\text{cm}}}.$$

Auch aus dem Kreisbogen b kann die Fläche des Kreissektors nach der Dreiecksberechnung bestimmt werden:

$$A_S = \frac{b \cdot r}{2} = b \cdot \frac{r}{2},$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{360} \cdot \frac{r}{\cancel{2}},$$

$$= r^2 \cdot \pi \frac{\alpha}{360}.$$

Der Kreisabschnitt

Zum Berechnen der Fläche eines Kreisabschnittes A_A zieht man (s. Abb. 35) von der Sektorfläche A_S die Dreiecksfläche AMB ab und erhält:

$$A_A = A_S - \text{Dreieck } AMB$$

$$A_A = \frac{b \cdot r}{2} - \frac{s \cdot (r - h)}{2}$$

$$A_A = \frac{b \cdot r - s \cdot (r - h)}{2}$$

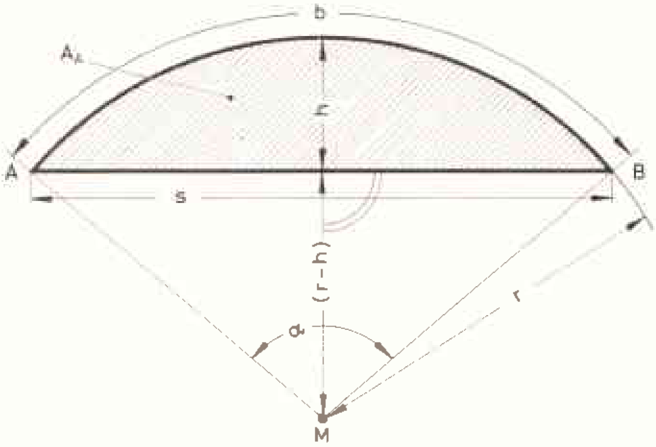


Abb. 35
Kreisabschnitt mit seinen Benennungen

Der Kreisring

In der Abb. 36 ist eine Kreisringfläche dargestellt.

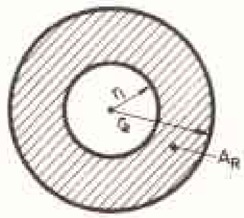


Abb. 36
Kreisringfläche

Bei der Berechnung einer Kreisringfläche A_R liegt die Überlegung zugrunde, daß es sich dabei um die Berechnung der ganzen Kreisfläche A_a mit dem Radius r_a (Radius des Außenkreises) handelt, von der die innere Kreisfläche A_i mit dem Radius r_i (Radius des Innenkreises) abgezogen wird:

$$A_R = A_a - A_i$$
$$A_R = r_a^2 \cdot \pi - r_i^2 \cdot \pi$$
$$A_R = (r_a^2 - r_i^2) \cdot \pi$$

7. 4. Der Körper

Bei jedem Körper unterscheidet man entsprechend den drei Koordinaten des Raumes drei Hauptausdehnungsrichtungen:

Länge — Breite — Höhe.

Die Körper werden nach ihrer Form unterschieden in

Prisma und Zylinder — Pyramide und Kegel — Kugel.

Der **Körperinhalt** — auch Volumen V*) des Körpers genannt — wird durch die drei Hauptausdehnungsgrößen Länge, Breite und Höhe bestimmt. Da aus der Länge und der Breite die Grundfläche des Körpers (A_G) zu berechnen ist, wird sein Inhalt ebenso durch die Grundfläche und die Höhe bemessen.

Zur **Oberfläche** eines Körpers gehören alle Teilflächen, die den Körper umgeben.

Der **Mantel** eines Körpers besteht aus den Teilflächen, die den Körper ummanteln. Die Grundfläche und die Deckfläche werden also — im Gegensatz zur Oberfläche — beim Berechnen des Mantels nicht mitberücksichtigt.

*) V = Körperinhalt (vom lateinischen »Volumen«).

7.4.1. Das Prisma*)

Das Prisma ist ein **Körper**, dessen **Grundflächen** (Grundfläche und Deckfläche) **parallele deckungsgleiche Vielecke** sind. Der Mantel eines Prismas besteht aus mehreren Vierecken, die zu einer Geraden parallel verlaufen und deren Anzahl sich nach der Form der Grundfläche richtet. Bei einem geraden Prisma besteht der Mantel aus Rechtecken (vgl. Abb. 37), bei einem schiefen Prisma aus Parallelogrammen (vgl. Abb. 38).

Nachstehend sind Prismen mit

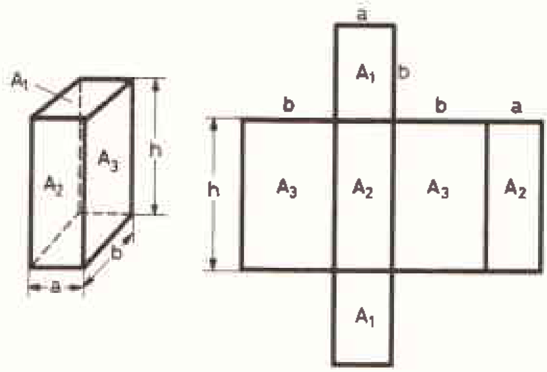
rechteckiger Grundfläche ⟶ vierseitiges Prisma,
dreieckiger Grundfläche ⟶ dreiseitiges Prisma,
trapezförmiger Grundfläche ⟶ vierseitiges Prisma

dargestellt.

Gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche

Das gerade Prisma mit rechteckiger Grundfläche wird auch Viereckssäule oder Quader**) genannt. Es ist ein Prisma, welches von sechs Rechtecken begrenzt wird und dessen Kanten senkrecht aufeinander stehen.

Abb. 37
Gerades Prisma mit rechteckiger Grundfläche



Grundfläche $\boldsymbol{A_1 = a \cdot b}$

Mantelfläche

$$M = 2 \cdot A_2 + 2 \cdot A_3$$
$$M = 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$$
$$\boldsymbol{M = 2h\,(a + b)}$$

Oberfläche

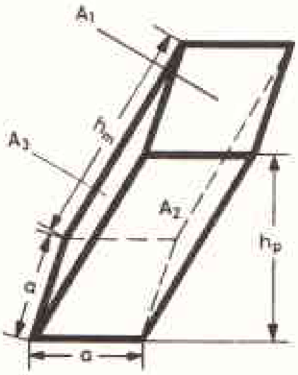
$$O = 2A_1 + M$$
$$O = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3$$
$$O = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot h + 2 \cdot b \cdot h$$
$$\boldsymbol{O = 2\,[ab + h\,(a + b)]}$$

Rauminhalt

$$V = A_1 \cdot h$$
$$\boldsymbol{V = a \cdot b \cdot h}$$

*) »Prisma« aus dem Griechischen.
**) »Quader« aus dem Lateinischen: »quadrus« = »viereckig«.

Schiefes Prisma mit quadratischer Grundfläche



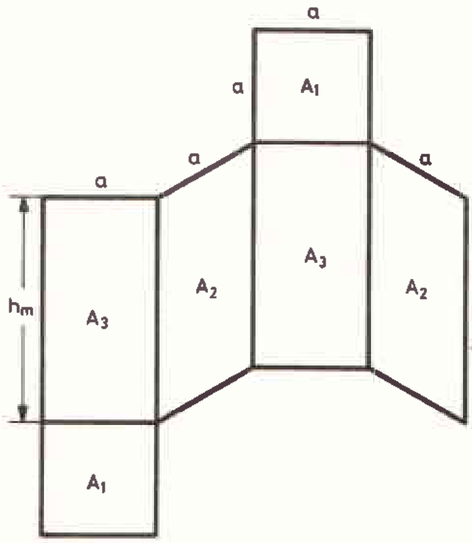


Abb. 38 Schiefes Prisma mit quadratischer Grundfläche

Grundfläche $\boldsymbol{A_1 = a^2}$

Mantelfläche $M = 2A_2 + 2A_3$

$M = 2 \cdot a \cdot h_p + 2 \cdot a \cdot h_m$

$\boldsymbol{M = 2a\,(h_p + h_m)}$

Oberfläche $O = 2A_1 + M$

$O = 2a^2 + 2ah_p + 2ah_m$

$\boldsymbol{O = 2a\,(a + h_p + h_m)}$

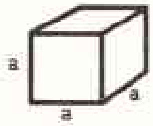
Rauminhalt $V = A_1 \cdot h_p$

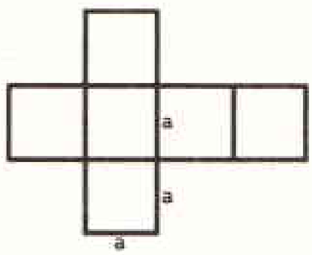
$\boldsymbol{V = a^2 \cdot h_p}$

Würfel

Der Würfel — auch Kubus*) genannt — ist eine **Sonderform des geraden Prismas.** Seine Kanten sind alle gleich lang; die Oberfläche besteht aus sechs gleich großen Quadraten. Aus diesen Gründen ist der Würfel eine der einfachsten Formen eines Körpers.

Abb. 39
Würfel





*) »Kubus« aus dem Lateinischen: »Würfel«; auch kann so die 3. Potenz bezeichnet werden, z. B. Kubikwurzel.

Grundfläche $A_1 = a^2$

Mantelfläche
$$M = 2A_2 + 2A_3$$
$$M = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a$$
$$\mathbf{M = 4a^2}$$

Oberfläche
$$O = 2A_1 + M$$
$$O = 2 \cdot a \cdot a + 4a^2$$
$$\mathbf{O = 6a^2}$$

Rauminhalt
$$V = A_1 \cdot h$$
$$V = a \cdot a \cdot a$$
$$\mathbf{V = a^3}$$

Prisma mit dreieckiger Grundfläche

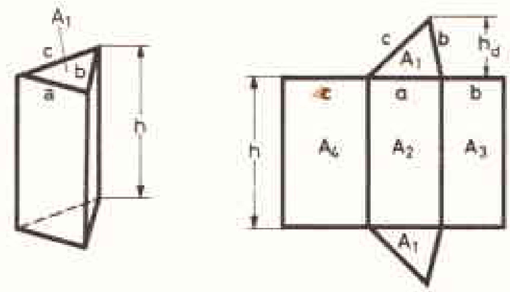


Abb. 40
Prisma mit dreieckiger Grundfläche

Grundfläche $A_1 = \dfrac{a \cdot h_d}{2}$

Mantelfläche
$$M = A_2 + A_3 + A_4$$
$$M = a \cdot h + b \cdot h + c \cdot h$$
$$\mathbf{M = h(a + b + c)}$$

Oberfläche
$$O = 2A_1 + M$$
$$O = \cancel{2}\frac{a \cdot hd}{\cancel{2}} + h(a + b + c)$$
$$\mathbf{O = a \cdot h_d + h(a + b + c)}$$

Rauminhalt
$$V = A_1 \cdot h$$
$$\mathbf{V = \frac{a \cdot h_d}{2} \cdot h}$$

Prisma mit einem gleichschenkligen Trapez als Grundfläche

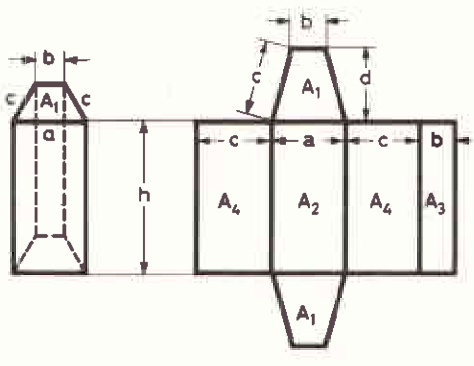


Abb. 41
Prisma mit einem gleichschenkligen Trapez als Grundfläche

Grundfläche $$A_1 = d\,\frac{a+b}{2}\text{*)}$$

Mantelfläche
$$M = A_2 + A_3 + 2 \cdot A_4$$
$$M = a \cdot h + b \cdot h + 2 \cdot c \cdot h$$
$$\boldsymbol{M = h\,(a + b + 2c)}$$

Oberfläche
$$O = 2A_1 + M$$
$$O = \cancel{2}d\,\frac{a+b}{\cancel{2}} + h\,(a + b + 2c)$$
$$\boldsymbol{O = d\,(a + b) + h\,(a + b + 2c)}\text{*)}$$

Rauminhalt
$$V = A_1 \cdot h$$
$$\boldsymbol{V = d\,\frac{a+b}{2} \cdot h}\text{*)}$$

7.4.2. Der Zylinder**)

Der Zylinder, auch Rundsäule oder Walze genannt, ist ein **Körper,** dessen **beide Grundflächen** A (Grundfläche und Deckfläche) **kreisförmig und deckungsgleich** sind und sich im Abstand h (Zylinder- bzw. Säulenhöhe) gegenüberstehen.

In Abb. 42 sind ein Zylinder und seine abgewickelte Oberfläche dargestellt.

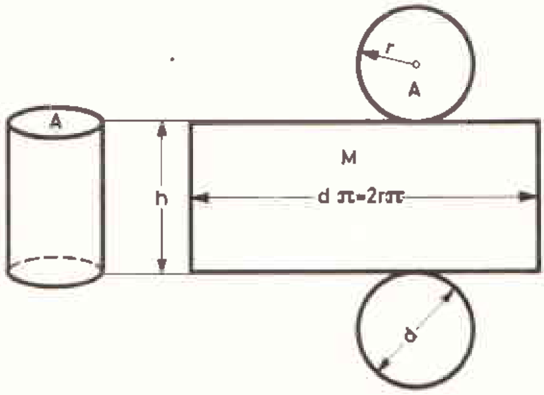


Abb. 42
Zylinder

Grundfläche $$\boldsymbol{A = r^2 \cdot \pi = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}}$$

Mantelfläche $$\boldsymbol{M = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h = d \cdot \pi \cdot h}$$

Oberfläche
$$O = 2A + M$$
$$O = 2r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$
$$\boldsymbol{O = 2r\pi\,(r + h)}$$

Rauminhalt
$$V = A \cdot h$$
$$\boldsymbol{V = r^2 \cdot \pi \cdot h}$$

*) Beim gleichschenkligen Trapez kann d mit Hilfe des Lehrsatzes des Pythagoras durch a, b und c ausgedrückt werden. Das rechtwinklige Dreieck zur Berechnung der Trapezhöhe hat die Hypotenuse c, die Kathete $\frac{a-b}{2}$ und die gesuchte Kathete d. Somit ist

$$d = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

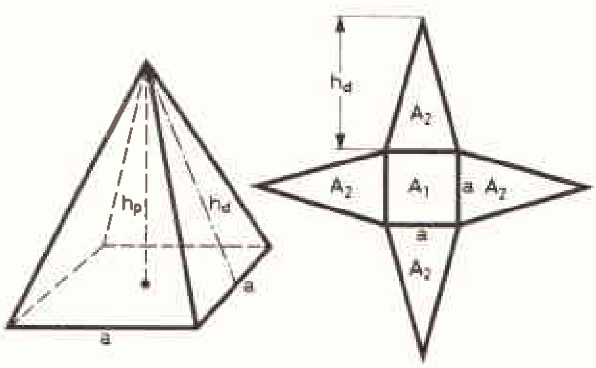
**) »Zylinder« von der lateinischen Sprache der griechischen entlehnt: »Körper, dessen Grundflächen zwei deckungsgleiche, parallele, krummlinig begrenzte Flächen sind«.

7. 4. 3. Die Pyramide*)

Die Pyramide ist ein **Körper**, dessen **Grundfläche** ein — meist regelmäßiges — **Vieleck** ist und dessen **Mantel aus mehreren Dreiecken** besteht, die oben **in einer Spitze zusammenlaufen.**

Abb. 43 zeigt als Beispiel eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, deren Mantel aus vier deckungsgleichen gleichschenkligen Dreiecken besteht.

Abb. 43
Pyramide mit quadratischer Grundfläche



Grundfläche $\boldsymbol{A_1 = a^2}$

Mantelfläche $M = 4 \cdot A_2$

$$M = \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{a \cdot h_d}{\underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$\boldsymbol{M = 2 \cdot a \cdot h_d}$$

Oberfläche $O = A_1 + M$

$$O = a^2 + 2 \cdot a \cdot h_d$$

$$\boldsymbol{O = a\,(a + 2 \cdot h_d)}$$

Rauminhalt $V = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_p$

$$\boldsymbol{V = \frac{a^2 \cdot h_p}{3}}$$

Der Rauminhalt einer Pyramide ist ein Drittel des Rauminhaltes eines Prismas gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

Auch bei einer Pyramide mit quadratischer Grundfläche können nach dem Lehrsatz des Pythagoras die Höhen h_p und h_d sowie die Seiten der begrenzenden Dreiecke (s) berechnet werden:

$$h_d = \sqrt{h_p{}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \qquad h_p = \sqrt{h_d{}^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

$$s = \sqrt{h_d{}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \qquad h_d = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2};$$

$$s = \sqrt{h_p{}^2 + 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \qquad h_p = \sqrt{s^2 - 2 \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Abb. 44 zeigt als weiteres Beispiel eine Pyramide, deren Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck ist und deren Mantel aus drei deckungsgleichen Dreiecken besteht.

---

*) »Pyramide« von der lateinischen Sprache der ägyptischen entlehnt: ursprüngliche Bedeutung: Bauwerk (Grabanlage), das über quadratischem Grundriß nach oben spitz zuläuft.

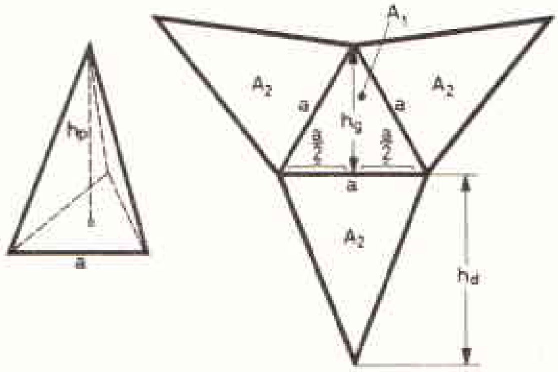


Abb. 44
Pyramide mit einem gleichseitigen Dreieck als Grundfläche

Grundfläche $A_1 = \frac{a \cdot h_g}{2}$

Da bei einem gleichseitigen Dreieck die Höhe nach dem Lehrsatz des Pythagoras berechnet werden kann, ist die Höhe der Grundfläche (h_g):

$$h_g = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2};$$

$$h_g = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}.$$

Somit ergibt sich für die Grundfläche:

$$A_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}.$$

Mantelfläche $M = 3 \cdot A_2$

$$M = 3 \cdot \frac{a \cdot h_d}{2} = \frac{3}{2}\, a \cdot h_d$$

Da die Höhe h_d durch die Höhen h_p und h_g ausgedrückt werden kann, ergibt sich bei einer Pyramide, die als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck hat:

$$h_d = \sqrt{h_p^2 + \left(\frac{h_g}{2}\right)^2} = \sqrt{h_p^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}\right)^2};$$

$$h_d = \sqrt{h_p^2 + \frac{1}{16}\, a^2 \cdot 3} = \sqrt{h_p^2 + \frac{3}{16}\, a^2}.$$

Somit ergibt sich für die Mantelfläche:

$$M = \frac{3}{2}\, a \cdot \sqrt{h_p^2 + \frac{3}{16}\, a^2}.$$

Oberfläche $O = A_1 + M$

$$O = \frac{a \cdot h_g}{2} + 3\,\frac{a \cdot h_d}{2}$$

$$O = \frac{a}{2}\,(h_g + 3h_d)$$

oder

$$O = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + \frac{a}{2} \cdot 3\sqrt{h_p^2 + \frac{3}{16}\, a^2}$$

$$O = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + 3\sqrt{h_p^2 + \frac{3}{16}\, a^2}\right)$$

Rauminhalt $V = \frac{1}{3} \cdot A_1 \cdot h_p$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a \cdot h_g}{2} \cdot h_p$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} \cdot h_p$$

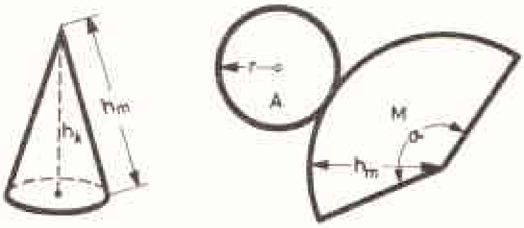
$$V = \frac{a^2}{12}\sqrt{3} \cdot h_p = \frac{1}{12}\, a^2 \cdot h_p \cdot \sqrt{3}$$

7. 4. 4. Der Kegel

Der Kegel ist ein **Körper**, dessen **Grundfläche eine krummlinig begrenzte Fläche** — in den meisten Fällen eine Kreisfläche — ist. Seine **Mantelfläche** läuft vom Umfang der Grundfläche aus **strahlenförmig zur Körperspitze** zusammen.

Kegel mit kreisförmiger Grundfläche nennt man auch **Kreiskegel.** In Abb. 45 wird ein Kreiskegel und seine abgewickelte Oberfläche gezeigt. Die Formeln zum Berechnen eines Kreiskegels werden nachfolgend angegeben.

Abb. 45
Kreiskegel



Grundfläche $A = r^2 \cdot \pi$

Die **Mantelfläche** des Kegels ist in ihrer Abwicklung der Sektor des Kreises*), dessen Radius gleich der Mantelhöhe h_m ist.

$$M = h_m{}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360}$$

Der Sektorwinkel α wird meistens nicht bekannt sein. Man kann aber für ihn auch den zugehörigen Bogen setzen, der gleich dem Umfang der kreisförmigen Kegelgrundfläche ist ($U_g = 2r \cdot \pi$). Für den gesamten Mittelpunktswinkel (360°) ist dann der ganze Umfang des Kreises zu setzen, aus dem der Kegelmantel ausgeschnitten ist ($U_m = 2h_m \cdot \pi$):

$$M = h_m{}^2 \cdot \pi \cdot \frac{U_g}{U_m}$$

$$M = h_m{}^2 \cdot \pi \cdot \frac{\cancel{2}r \cdot \cancel{\pi}}{\cancel{2}h_m \cdot \cancel{\pi}} = \frac{h_m{}^2}{h_m} \cdot r \cdot \pi$$

$$M = h_m \cdot r \cdot \pi$$

Da aber auch die Mantelhöhe h_m selten angegeben sein wird, muß h_m auf die Höhe des Kegels h_k umgerechnet werden:

$$h_m = \sqrt{h_k{}^2 + r^2}.$$

Es folgt somit

$$M = r \cdot \pi \cdot \sqrt{h_k{}^2 + r^2}.$$

Oberfläche $O = A + M$

$$O = r^2 \cdot \pi + r \cdot \pi \cdot h_m$$

$$O = r \cdot \pi (r + h_m)$$

oder $O = r \cdot \pi (r + \sqrt{h_k{}^2 + r^2})$

Rauminhalt $V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot h_k$

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h_k$$

Der Rauminhalt eines Kegels ist ein Drittel des Rauminhalts eines Zylinders gleicher Grundfläche und gleicher Höhe.

*) Vgl. Abschnitt 7. 3. 4.

7. 4. 5. Die Kugel

Die Kugel ist ein **Körper mit gleichmäßig gekrümmter Oberfläche**, die vom Körpermittelpunkt (M) einen gleichbleibenden Abstand (r) hat.

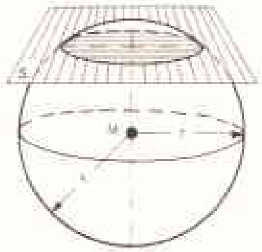


Abb. 46
Kugel
mit einer Schnittebene

Oberfläche $\boldsymbol{O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi}$

$\boldsymbol{O = d^2 \cdot \pi}$

Rauminhalt $\boldsymbol{V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi}$

7. 4. 6. Berechnen unregelmäßiger Körper anhand von zwei oder drei Ansichten

Sollen unregelmäßige Körper berechnet werden, ist es zweckmäßig, diese so in regelmäßige Körper zu zerlegen, daß der Rechengang vereinfacht wird. Der unregelmäßige Körper ist dann dadurch zu bestimmen, daß die Ergebnisse der Zwischenrechnungen (Berechnung der regelmäßigen Körper) addiert oder subtrahiert werden.

Beispiel

In Abb. 47 ist ein Kabelformstein in der Vorderansicht und in der Seitenansicht dargestellt. Berechne seinen Rauminhalt und sein Gewicht.

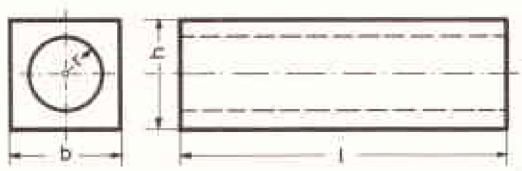


Abb. 47
Kabelformstein

$l = 100\,\text{cm}$
$b = 15\,\text{cm}$
$h = 15\,\text{cm}$
$r = 5\,\text{cm}$
$\gamma = 1{,}8\,\text{kg/dm}^3$

Um das Volumen (V) des Kabelformsteines zu bestimmen, muß man vom Volumen (V_P) des Prismas das Volumen (V_Z) des Zylinders (Zuges) abziehen. Die Formel lautet dann:

$$V = V_P - V_Z,$$
$$V = h \cdot b \cdot l - r^2 \cdot \pi \cdot l,$$
$$V = l(h \cdot b - r^2 \cdot \pi);$$
$$V = 100\,(15 \cdot 15 - 5^2 \cdot 3{,}14),$$
$$V = 100\,(225 - 78{,}5),$$
$$\underline{\underline{V}} = 14\,650\,\text{cm}^3 = \underline{\underline{14{,}65\,\text{dm}^3}}.$$

$$G = V \cdot \gamma,$$
$$G = 14{,}65 \cdot 1{,}8,$$
$$\underline{\underline{G = 26{,}370\,\text{kg}}}.$$

7. 5. Fragen zu Abschnitt 7 (Raumlehre (Geometrie))

1. Welche Begriffe behandelt die Raumlehre?
2. Was versteht man unter einer Linie? Welche Arten von Linien unterscheidet man?
3. Wie ergibt sich ein Winkel?
4. Wie nennt man die Dimensionen eines Körpers?
5. Wie nennt man Linien, die stetig ihre Richtung ändern?
6. Wodurch wird die Größe eines Winkels bestimmt?
7. Wieviel Grad hat ein rechter Winkel?
8. Nenne Flächen, die von gekrümmten Linien begrenzt sind!
9. Gib verschiedene Dreiecksformen an!
10. Wie heißen die drei Seiten, die ein rechtwinkliges Dreieck bilden?
11. Auf welchem Anwendungsgebiet kommt dem rechtwinkligen Dreieck besondere Bedeutung zu?
12. Was ist ein Parallelogramm?
13. Gib einige regelmäßige Vielecke an!
14. Was ist ein Kreisausschnitt?
15. Wie entsteht eine Kreisringfläche?
16. Was ist ein Kubus?
17. Welche Formen kann die Grundfläche bei Prismen haben?
18. Bei welchen Körpern spricht man von einem Mantel?
    Erkläre den Begriff!
19. Welche Form haben die Seitenflächen einer Pyramide?
20. Wieviel Einzelflächen hat eine Kreiskegel-Oberfläche?

8. Grundbegriffe der Kreisfunktionen

8. 1. Allgemeines über Funktionen

Im Abschnitt 6. 5. wurde die Abhängigkeit zweier Größen im Koordinatenfeld dargestellt.

Die **mathematische Abhängigkeit** zweier Größen voneinander bezeichnet man als **Funktion**; die Gleichung dafür ist eine **Funktionsgleichung**. Im folgenden Beispiel ist y eine Funktion von x:

$$\boxed{y = f(x)} \; *)$$

Das bedeutet, daß y von x abhängt; nimmt x verschiedene — unabhängig gewählte — Werte an, so ändert sich auch die Größe y — davon abhängig — entsprechend. Eine solche **Funktionsgleichung** kann z. B. heißen:

$$y = x - 3$$

Durchläuft x beispielsweise Werte von »—3« bis »+6«, so wird y seine Größe, von x abhängig, entsprechend ändern. Abb. 48 zeigt diese Funktion.

x	y
−3	−6
−2	−5
−1	−4
0	−3
+1	−2
+2	−1
+3	0
+4	+1
+5	+2
+6	+3

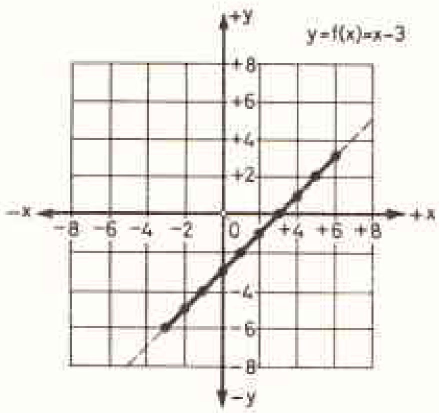


Abb. 48
Graphische Darstellung der Funktion y = x — 3

Werden die zu jedem Wert von x ermittelten y-Werte miteinander verbunden, dann ergibt sich ein **geradliniger Kurvenverlauf**; diese Funktion bezeichnet man daher als **lineare Funktion**. Das braucht nicht immer der Fall zu sein, so zeigt die Funktion $\mathbf{y = x^2}$ einen **nichtlinearen** Verlauf. Besondere Bedeutung kommt im Rahmen der Wechselstromlehre den **Kreisfunktionen** zu. Dies sind **Funktionen**, die keinen geradlinigen Verlauf haben und von einem **Kreis** abgeleitet werden.

8. 2. Der Einheitskreis

Beim Einheitskreis ist die **Zahleneinheit »1«** als Radius gewählt worden, sie hat damit diesem Kreis seinen Namen gegeben:

$$\boldsymbol{r = 1}.$$

Diese »1« für den Radius des Einheitskreises ist die Bezugsgröße für alle anderen Abmessungen des Kreises (z. B. für den Durchmesser oder Umfang).

Der **Durchmesser** (d) dieses **Kreises** ist

$$d = 2 \cdot r = 2 \cdot 1 = 2.$$

Der **Umfang** (U) des **Einheitskreises** ist

$$U = 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot 1 \cdot 3{,}14 = 6{,}28.$$

Die Abb. 49 zeigt den Einheitskreis ($r = 1$), der in der Regel um den Koordinatenmittelpunkt gezeichnet wird.

*) Lies: »y ist eine Funktion von x«, oder kürzer »y gleich f von x«

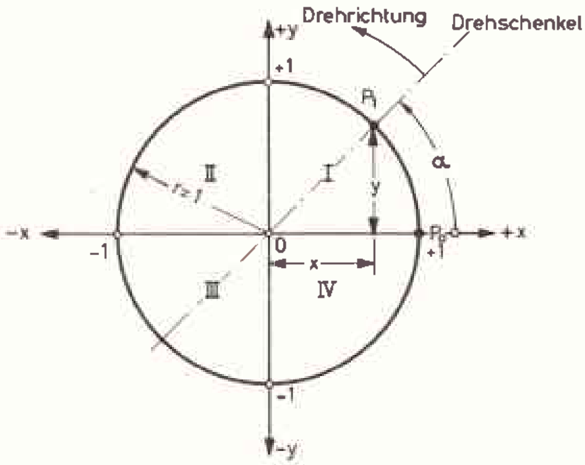


Abb. 49
Der Einheitskreis

8. 3. Die Kreisfunktionen Sinus und Kosinus*)

Aus der Abb. 49 ist ersichtlich, daß der Winkel α, um dessen Größe der Drehschenkel aus der waagrechten Lage heraus gegen den Uhrzeigersinn (von P_0 nach P_1) gedreht worden ist, durch Koordinatenwerte für P_1 (x, y) ausgedrückt werden kann. Die **Koordinatenwerte** für P_1 (x, y) sind **vom Drehwinkel** α (Sektorwinkel) **abhängig**. Die Werte x bzw. y sind also **Funktionen vom Drehwinkel** α, nämlich Kreisfunktionen:

$$x = f(\alpha),$$
$$y = f(\alpha).$$

Die **Kreisfunktionen** werden auch **Winkelfunktionen** oder **trigonometrische****) **Funktionen** genannt.

Sollen die Kreisfunktionen ermittelt werden, so ist der um den Winkel α aus der waagrechten Lage herausgedrehte Drehschenkel auf die Achsen des Koordinatensystems zu **projizieren*****). Diese Projektion läßt sich einfach ausführen, indem man vom Punkt P_1 ein Lot, das **Projektionslot**, auf die x-Achse oder auf die y-Achse des Achsenkreuzes fällt (vgl. Abb. 50).

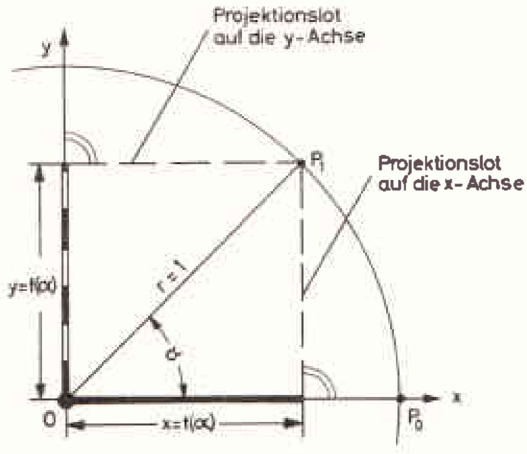


Abb. 50
Projektion des Drehschenkels auf die Achsen des Koordinatensystems

*) Siehe auch: Fernmeldetechnischer Atlas, Teil b: Grundlagen, Rech 301 und Rech 302.

**) »Trigonometrie« aus dem Griechischen: »Berechnen von Dreiecken unter Verwendung von Winkeln«; »trigonometrisch« = »unter Verwendung von Winkeln gemessen oder berechnet«.

***) »Projizieren« aus dem Lateinischen: »Ein geometrisches Gebilde (Körper oder Strecke) durch Zeichnen von Strahlen auf einem anderen geometrischen Gebilde (z. B. Zeichenebene oder Achsenkreuz) abbilden«.

Die **Projektion auf die y-Achse** ergibt

$$y = f(\alpha),$$

weil die Länge der projizierten Strecke von dem Winkel α abhängig ist, um den der Drehschenkel aus der waagrechten Lage herausgedreht worden ist. Diese Funktion bezeichnet man als den **Sinus*) des Winkels** α und schreibt in abgekürzter Form

$$\boxed{y = \sin \alpha}$$

Das gleiche gilt für die **Projektion auf die x-Achse,** die

$$x = f(\alpha)$$

ergibt. Diese Funktion wird als **Kosinus**) des Winkels** α bezeichnet und geschrieben

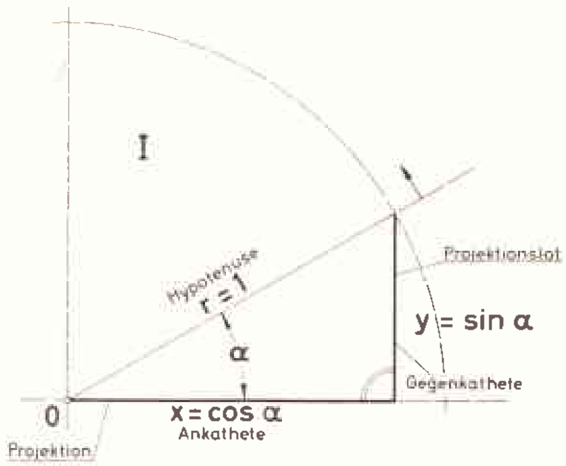
$$\boxed{x = \cos \alpha}$$

Die in Abb. 50 gezeichnete Strecke $y = f(\alpha)$ kann so parallel verschoben werden, daß sie am rechten Ende der Strecke $x = f(\alpha)$ ihren Fußpunkt hat. Es ergibt sich ein **rechtwinkliges Dreieck** mit

der **Hypotenuse** $r = 1$,
der dem Winkel α gegenüberliegenden **Gegenkathete** $y = \sin \alpha$,
der dem Winkel α anliegenden **Ankathete** $x = \cos \alpha$.

Der **rechte Winkel** wird von den beiden Katheten eingeschlossen und liegt der Hypotenuse gegenüber (vgl. Abb. 51).

Abb. 51
Darstellung der Sinus- und Kosinus-Funktionen am rechtwinkligen Dreieck



Aus der Abb. 51 können die Werte der Kreisfunktionen abgemessen werden. Sie bewegen sich in den **Grenzen,** die der **Tabelle 2** zu entnehmen sind.

Quadrant	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
I	0 bis +1	+1 bis 0
II	+1 bis 0	0 bis −1
III	0 bis −1	−1 bis 0
IV	−1 bis 0	0 bis +1

Tabelle 2 Grenzwerte der Kreisfunktionen

*) »Sinus« aus dem Lateinischen: »Ausbuchtung«; hier ist die »Sinusfunktion«, eine Winkelfunktion, gemeint.
**) »Ko-sinus« aus dem Lateinischen: Die Vorsilbe »Ko ...« drückt die Vervollständigung aus. Durch die Kosinus-Funktion wird die Sinus-Funktion ergänzt, also vervollständigt.

Unterteilt man jeden Quadranten nach Winkelgraden, Minuten und Sekunden, so ergeben sich **Tabellen der Winkelfunktionen**, sogenannte **Funktionstabellen** (Tabelle 3) für jeden möglichen Winkel.

Aus dem in Abb. 51 gezeigten rechtwinkligen Dreieck können die Funktionen auch trigonometrisch abgeleitet werden.

Es ist der **Sinus** eines Winkels α gleich dem **Quotienten** aus **Gegenkathete** und **Hypotenuse**.

$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\sin \alpha = \frac{y}{r}$

und, da $r = 1$,

$\sin \alpha = \frac{y}{1} = y$

Stellt man diese Funktion **graphisch** dar (Abb. 52), dann ergibt sich eine **Kurve mit sinusförmigem Verlauf** (Sinuskurve). Diese Kurve entsteht dadurch, daß der Drehschenkel aus seiner waagrechten Lage stetig herausgedreht wird und die zu dem jeweiligen Winkel gehörenden y-Werte (Funktionswerte) in ein Diagramm übertragen (projiziert) werden. Werden die einzelnen Projektionspunkte (z.B. für α: 0°; 22,5°; 45°; 67,5°; 90°) untereinander verbunden, so entsteht die **Sinuskurve**.

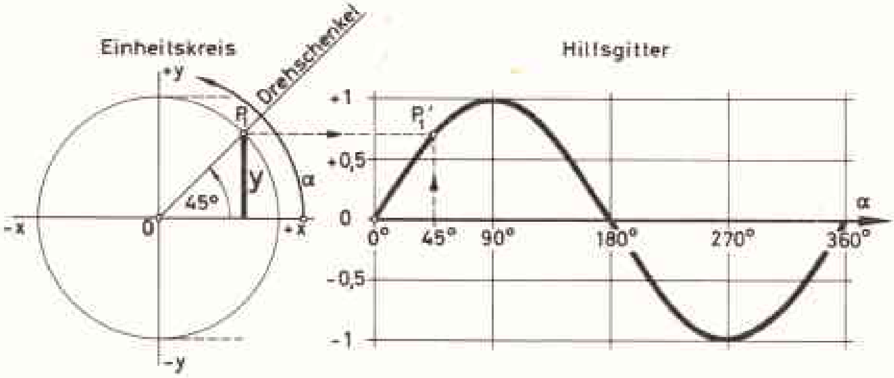


Abb. 52 Graphische Darstellung der Sinuskurve

Der in Abb. 52 gezeigte Verlauf der Sinuskurve bestätigt die Grenzwerte der Sinusfunktion, die in der Tabelle 2 angegeben sind.

Für die Kosinus-Funktion kann ebenfalls aus der Abb. 51 abgeleitet werden, daß der **Kosinus** eines Winkels α gleich dem **Quotienten** aus **Ankathete** und **Hypotenuse** ist.

$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos \alpha = \frac{x}{r}$

und, da $r = 1$,

Aus der Tabelle 3 sind die Sinus- und Kosinuswerte für die Winkel von 0° bis 360° ersichtlich. In Tabellenbüchern sind oft nur die Funktionswerte der Winkel von 0° bis 45° angegeben, weil mit ihnen die Funktionswerte aller anderen Winkel berechnet werden können, z. B.

$$\underline{\underline{\sin 110^\circ}} = \sin(180^\circ - 110^\circ) = \sin 70^\circ = \cos(90^\circ - 70^\circ) = \cos 20^\circ;$$

$$\sin 70^\circ = \underline{\underline{0{,}94}}.$$

$$\underline{\underline{\cos 230^\circ}} = -\cos(230^\circ - 180^\circ) = -\cos 50^\circ = -\sin(90^\circ - 50^\circ) = -\sin 40^\circ;$$

$$-\cos 50^\circ = \underline{\underline{-0{,}643}}.$$

Tabelle 3
Sinus- und Kosinuswerte für die Winkel von 0° bis 360°

α [°]	sin α	cos α	α [°]	sin α	cos α
0	0	1	180	0	– 1
10	0,174	0,985	190	– 0,174	– 0,985
20	0,342	0,94	200	– 0,342	– 0,94
30	0,5	0,866	210	– 0,5	– 0,866
40	0,643	0,766	220	– 0,643	– 0,766
50	0,766	0,643	230	– 0,766	– 0,643
60	0,866	0,5	240	– 0,866	– 0,5
70	0,94	0,342	250	– 0,94	– 0,342
80	0,985	0,174	260	– 0,985	– 0,174
90	1	0	270	– 1	0
100	0,985	– 0,174	280	– 0,985	0,174
110	0,94	– 0,342	290	– 0,94	0,342
120	0,866	– 0,5	300	– 0,866	0,5
130	0,766	– 0,643	310	– 0,766	0,643
140	0,643	– 0,766	320	– 0,643	0,766
150	0,5	– 0,866	330	– 0,5	0,866
160	0,342	– 0,94	340	– 0,342	0,94
170	0,174	– 0,985	350	– 0,174	0,985
180	0	– 1	360	0	1

Praktisch lassen sich die Winkelfunktionen nutzen, um **im rechtwinkligen Dreieck**

bei **einem** bekannten **Winkel** und **einer** bekannten **Seite**
die übrigen Seiten und Winkel,

bei **zwei** bekannten **Seiten**
die dritte Seite und alle Winkel

bestimmen zu können.

Beispiele

In einem rechtwinkligen Dreieck ist der Winkel $\alpha = 50°$ groß, die an dem Winkel anliegende Kathete ist 4 cm lang.

Berechne die übrigen Seiten und Winkel!

$$\underline{\underline{\gamma = 90^\circ}}.$$

$$\underline{\underline{\beta}} = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 50^\circ = \underline{\underline{40^\circ}}.$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\underline{\underline{c}} = \frac{b}{\cos \alpha} = \frac{4}{\cos 50^\circ} = \frac{4}{0{,}643} = \underline{\underline{6{,}22\,\text{cm}}}.$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c};$$

$$\underline{\underline{a}} = c \cdot \sin \alpha = 6{,}22 \cdot \sin 50^\circ = 6{,}22 \cdot 0{,}766 = \underline{\underline{4{,}765\,\text{cm}}}.$$

In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Hypotenuse 8,5cm, eine Kathete 3,4cm lang. Wie groß ist die dritte Seite, und wie groß sind die Winkel?

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{8{,}5^2 - 3{,}4^2} = \sqrt{72{,}25 - 11{,}56}\,.$$

$$\underline{\underline{a}} = \sqrt{60{,}69} = \underline{\underline{7{,}79\,\text{cm}}}\,.$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{3{,}4}{8{,}5} = 0{,}4\,;$$

$$\underline{\underline{\beta \sim 24^\circ}}\,.$$

$$\underline{\underline{\gamma = 90^\circ}}\,.$$

$$\underline{\underline{\alpha}} \sim 90^\circ - 24^\circ \sim \underline{\underline{66^\circ}}\,.$$

8. 4. Die Kreisfunktionen Tangens und Kotangens*)

Neben den Kreisfunktionen Sinus und Kosinus gibt es noch die Tangens- und Kotangensfunktion. Bei der Sinus- oder der Kosinusfunktion wird immer eine Kathete durch die Hypotenuse dividiert, um den Funktionswert zu finden. Bei der **Tangensfunktion** wird ein **Quotient** aus den **beiden Katheten** gebildet.

So ist der **Tangens****) eines Winkels gleich dem **Quotienten** aus **Gegenkathete** und **Ankathete**.

und, wenn — wie in Abb. 53 dargestellt — x = 1 ist,

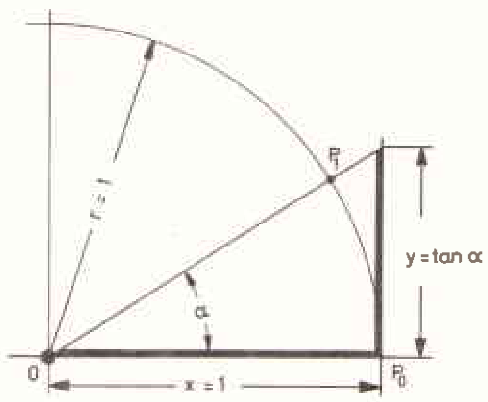


Abb. 53
Darstellung der Tangensfunktion

*) Siehe auch: Fernmeldetechnischer Atlas, Teil 1: Grundlagen, Rech 301 und Rech 302.
**) »Tangens« aus dem Lateinischen: »Die Tangente, die den Einheitskreis im Punkte P_0 (bei x = 1) berührt« und senkrecht auf der x-Achse steht.

Der **Kotangens** eines Winkels ist gleich dem **Quotienten** aus **Ankathete** und **Gegenkathete**.

und, da x = 1 ist,

Daraus ist ersichtlich, daß der **Kotangens** eines Winkels **gleich dem Kehrwert des Tangens** dieses Winkels ist:

Auch die Kreisfunktionen Tangens und Kotangens werden benötigt, um Seiten und Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck berechnen zu können.

8. 5. Fragen zu Abschnitt 8 (Grundbegriffe der Kreisfunktionen)

1. Erläutere den Begriff »Funktion«!
2. Wie kann man eine Funktion darstellen?
3. Wann ist eine Funktion linear?
4. Welchen Wert hat der Umfang des Einheitskreises?
5. Wie nennt man die Kreisfunktionen noch?
6. In der Landvermessung werden sogenannte »Trigonometrische Punkte« festgelegt. Wozu werden sie benötigt?
7. Wie heißt die trigonometrische Ableitung für den Sinus?
8. Durch welche Größen können die Seiten und Winkel in einem rechtwinkligen Dreieck bestimmt werden?

Aufgaben zu Abschnitt 6. 2. (Darstellen vergleichbarer Größen durch Strecken)

256) In den Jahren 1956, 1958, 1960 und 1962 landeten auf dem Flugplatz in A-Stadt jeweils 1085, 1590, 2025 und 2275 Flugzeuge.

Stelle die Anzahl der Landungen in einem Schaubild durch Strecken dar!

257) Im Jahre 1956 waren von den in Aufgabe 256 genannten Flugzeugen 104 mit Düsentriebwerken ausgerüstet, im Jahre 1958 bereits 196, im Jahre 1960 482 und im Jahre 1962 sogar 1400.

Zeichne eine graphische Darstellung, in der die Angaben der Aufgabe 256 (Gesamtflugzeuge) mit den Zahlenwerten dieser Aufgabe (Düsenflugzeuge) verglichen werden!

258) Zeige in einer graphischen Darstellung durch vergleichende Strecken, wie viele Lehrlinge eines Lehrtrupps die Lehrwerkstatt

a) zu Fuß,
b) mit dem Fahrrad,
c) mit der Straßenbahn,
d) mit der Eisenbahn,
e) mit sonstigen Verkehrsmitteln (Kfz)

erreichen!

Aufgaben zu Abschnitt 6. 3. (Darstellen vergleichbarer Größen durch Flächen)

259) Dem statistischen Jahrbuch der Bundesrepublik Deutschland ist der Zahlenwert für die Gesamtfläche des Bundeslandes Bayern (70 238 km²) entnommen.

Diese Fläche teilt sich in die sieben Regierungsbezirke wie folgt auf:

Regierungsbezirke	Landfläche in km²	Landfläche in %
Unterfranken	8 488	12
Oberfranken	7 504	10
Mittelfranken	7 619	11
Oberpfalz	9 646	14
Schwaben	9 889	14
Niederbayern	10 754	15,5
Oberbayern	16 338	23,5
Gesamt	70 238	100

Stelle den prozentualen Flächenanteil jedes Regierungsbezirks graphisch dar, und zwar:

a) als rechteckige Teilfläche einer Rechteckfläche
und
b) als Kreissektor einer Kreisfläche.

Aufgaben zu Abschnitt 6. 4. (Darstellen vergleichbarer Größen durch Schaulinien)

260) Beobachte eine Straße und zähle, wie viele Kraftfahrzeuge von Minute zu Minute eine bestimmte Stelle (Kreuzung, Fußgängerüberweg) passieren. Stelle anschließend diese Beobachtungen in einer graphischen Darstellung dar!

261) Überlege selbst ein zweites Beispiel aus dem praktischen Leben, und fertige dazu eine passende Darstellung an!

Aufgaben zu Abschnitt 6. 5. (Darstellen der Abhängigkeit einer Größe von einer anderen im Koordinatenfeld)

262) Nach dem Ohmschen Gesetz ist der Strom I gleich dem Quotienten aus der Spannung U und dem Widerstand R $\left(I = \frac{U}{R}\right)$.

An einer konstanten Klemmenspannung $U_K = 2$ V sollen Widerstände von 1 Ohm bis 10 Ohm in Widerstandsunterschieden von je 1 Ohm angeschlossen werden.

Berechne den Strom I in Abhängigkeit von den Widerständen, und stelle diese Abhängigkeit in einer Tabelle und in einem Schaubild dar!

263) Die niedrigste Temperatur an jedem 2. Tag im Monat März wurde registriert.

Monatstag	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.	18.	20.	22.	24.	26.	28.	30.
Temperatur (°C)	+2	−2	−6	−1	+4	+8	+8	−1	−1	−3	−8	+1	−3	−4	+3

Stelle dazu in einer Tage-°C-Schaulinie die Abhängigkeit der Mindesttemperaturen von den Monatstagen dar, an denen gemessen wurde!

Aufgaben zu Abschnitt 7. 3. 1. (Das Viereck)

264) Ein Rechteck ist 5dm lang und 0,45m breit. Berechne seinen Flächeninhalt in cm^2!

265) Ein Quadrat hat einen Flächeninhalt von 21025cm^2. Berechne die Seitenlänge in m!

266) Zeichne ein Trapez beliebiger Größe und berechne nach Abmessen der erforderlichen Strecken den Flächeninhalt des Trapezes!

267) Zeichne ein Trapezoid (Viereck allgemeiner Art) mit den Seiten: $A—B$ = 5cm; $B—C$ = 6cm; $C—D$ = 7cm; $A—D$ = 4cm und mit der Diagonale $A—C$ = 9cm.
Bestimme durch Abmessen die Diagonale $B—D$ und die Höhen h_I und h_{II}!
Welchen Flächeninhalt hat dieses Trapezoid?

Aufgaben zu Abschnitt 7. 3. 2. (Das Dreieck)

268) Bei einem Dreieck beträgt die Grundlinie 4,5cm, die dazugehörige Höhe mißt 6cm. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks?

269) Wie groß ist die Grundlinie eines Dreiecks, dessen Fläche A 146cm^2 beträgt und das eine Höhe von 16cm hat?

270) Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse c = 12cm, die Kathete a = 8cm lang. Wie groß ist die Kathete b ?

271) Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine Fläche von 15cm^2 und eine Höhe von 6cm. Berechne die Seiten des Dreiecks!

272) Ein Rechteck wird durch eine Diagonale von 15cm Länge in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Die eine Seite des Rechtecks beträgt 9cm.
Welche Länge hat die zweite Seite?

273) Ein gleichschenkliges Dreieck hat eine Grundlinie von 24cm und eine Höhe von 16cm. Welche Länge haben die Schenkel, und wie groß ist die Dreiecksfläche?

274) Welche Länge hat die Diagonale eines Quadrates, dessen Seitenlänge 25m beträgt?

275) *) Bestimme die Scheinleistung P_s eines Elektromotors, der bei einer Wirkleistung von 5,2kW eine Blindleistung von 1,45BkW aufnimmt!

276) *) Welchen Scheinwiderstand Z hat eine Spule mit einem Selbstinduktionskoeffizienten L von 150mH bei einer Frequenz von 800Hz, wenn der Wirkwiderstand R der Spule bei dieser Frequenz 1500Ω beträgt?

277) a) Zeichne ein rechtwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein gleichschenkliges Dreieck mit der Grundlinie g und der Höhe h ($g = h$ = 4cm)!
b) Gib die Formel zur Berechnung des jeweiligen Flächeninhaltes an!
c) Bestimme die Dreiecksflächen in cm^2!

278) Bestimme die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1m und gib den Flächeninhalt an!

---
*) Die Erklärung dieser elektrotechnischen Begriffe siehe Lernblätter F, Lehrstoff Elektrotechnik (Wechselstromlehre).

Aufgaben zu Abschnitt 7. 3. 4. (Der Kreis)

279) Der Äquator der Erdkugel ist 40076592 m lang. Berechne den Durchmesser der Erde in der Äquatorebene!

280) Die Kapazität einer Kugel mit elektrisch leitender Oberfläche, die frei im Raum schwebt, kann aus der Größe ihres Halbmessers berechnet werden, weil 1 cm Radius einer elektrischen Kapazität von 1,1 pF entspricht.

Welche Kapazität besitzt demnach eine Metallkugel,

a) die einen Durchmesser von 1 m hat,

b) die die Größe der Erdkugel hat (Kugelumfang sei rund 40000 km)?

281) Ein auf der Erdoberfläche längs der Äquatorlinie fest aufliegendes Band wird um 1 m verlängert. In welchem Abstand würde das verlängerte Band über der Erdoberfläche schweben, wenn dieser Abstand überall gleich groß gehalten wird?

282) Um wieviel würde die Äquatorlinie länger werden, wenn der Durchmesser der Erde um 5 m vergrößert werden würde?

a) Schätze zuerst das Ergebnis!

b) Errechne den genauen Zahlenwert!

283) Welchen Durchmesser muß ein Kreis haben, damit sein Umfang gerade 1 m lang ist?

284) Der Querschnitt eines Runddrahtes beträgt $A = 4\,\text{mm}^2$.

Berechne den Drahtdurchmesser!

285) Die Ringfläche eines Turmfundamentes ist zu berechnen. Der Turmumfang beträgt 30 m, die lichte Weite der Turmringmauer 6,5 m.

286) Ein Bleikabel hat einen Außendurchmesser von 50 mm. Die Wanddicke des Kabelmantels beträgt 2,2 mm. Wie groß ist die lichte Weite des Kabelmantels?

287) Ein Kreissektor hat einen Sektorwinkel von 72° 30′.

Berechne die Sektorfläche, wenn der Kreisdurchmesser 1,2 m beträgt!

288) Die Bogenlänge eines Kreissektors mit dem Sektorwinkel von 36° beträgt 12 cm.

Berechne die Sektorfläche und den Kreisdurchmesser!

289) Aus einer Kreisfläche (Kreisdurchmesser 75 cm) wird ein Sektor herausgeschnitten, dessen Bogenlänge ebenfalls 75 cm beträgt.

Welche Fläche mißt der Sektor?

290) Bei einem Runddraht bestimmten Durchmessers sind Durchmesser und Querschnitt zahlengleich.

Um welche Zahl handelt es sich?
In welchen anderen Fällen haben der Durchmesser und der Querschnitt eines Runddrahtes gleiche Ziffernfolgen, und in welchem Verhältnis stehen die Zahlenwerte selbst?

291) Berechne die Größe des Kreisabschnittes und des Kreisbogens über einem Sektorwinkel von 60°, wenn die Kreisfläche $1{,}9625 \cdot 10^3\,\text{cm}^2$ beträgt!

Aufgaben zu Abschnitt 7. 4. 1. (Das Prisma)

292) Ein Würfel hat eine Kantenlänge von 8cm.
Berechne seinen Rauminhalt!
Wie groß ist die Körperdiagonale dieses Würfels?

293) Ein Prisma hat eine rechteckige Grundfläche von $54 cm^2$.
Berechne seinen Rauminhalt, wenn sich die Seiten und die Höhe $a : b : h$ verhalten wie 2 : 3 : 4!
Zeichne im Maßstab 1 : 2,5 die abgewickelte Oberfläche dieses Prismas!

294) Berechne das Volumen und die Oberfläche eines Prismas, dessen Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit einer Seitenlänge von 6cm ist und dessen Höhe 12cm beträgt!

295) Das Volumen eines Prismas, dessen Grundfläche von einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck gebildet wird, beträgt $125 cm^3$. Die Höhe des Prismas ist 14cm.
Berechne die Grundfläche des Prismas und ihre Seitenlängen!

296) Ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche hat ein Volumen von $1 m^3$. Wenn nach Abb. 41 $a = 40 cm$, $b = 30 cm$ und $d = 20 cm$ betragen, kann daraus die Prismenhöhe errechnet werden. Wie groß ist sie?
Zeichne im Maßstab 1 : 10 die Mantelfläche des Prismas!

297) Ein Kabelgraben mit trapezförmigem Querschnitt hat eine 50cm breite Sohle. Die obere Weite des Grabens beträgt 70cm. Wie viele Kubikmeter Erdreich müssen bei 80cm Grabentiefe ausgehoben werden, wenn die Grabenlänge 32,75m beträgt?

Aufgaben zu Abschnitt 7. 4. 2. (Der Zylinder)

298) Ein Kreiszylinder hat einen Durchmesser von 2,5cm und eine Höhe von 10cm.
Berechne die Grundfläche, die Mantelfläche, die Oberfläche und den Rauminhalt des Zylinders!

299) Eine Straßenwalze hat einen Walzzylinder aus Eisen (spezifisches Gewicht $= 7{,}74 kg/dm^3$), der 28t wiegt. Berechne Durchmesser und Umfang der Walze, wenn sie 1,8m lang ist.

300) Welches Gewicht besitzt ein Kupferdraht von 0,8mm Durchmesser bei 2500m Länge, wenn das spezifische Gewicht von Kupfer $8{,}9 kg/dm^3$ beträgt?

Aufgaben zu Abschnitt 7. 4. 3. (Die Pyramide)

301) Die quadratische Grundfläche der Cheopspyramide hat 227m Seitenlänge. Die Pyramidenhöhe beträgt 173m.
Wie lang würde eine Mauer werden, die man aus diesen Gesteinsmassen mauern könnte, wenn sie 2m hoch und 1m dick wäre? (Annahme: Die Cheopspyramide sei ein voller Körper!)

302) Welchen Rauminhalt umschließen die Außenflächen einer dreiseitigen Turmspitze, deren Grundfläche aus einem gleichseitigen Dreieck von 3m Seitenlänge gebildet ist und deren Höhe 36m beträgt?
Bestimme außerdem die Höhe einer Dreiecksfläche dieser Turmspitze!

303) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seitenlänge gleich der Pyramidenhöhe h_p ist.
Wie groß ist die Pyramidenhöhe und die Pyramidenoberfläche, wenn ihr Rauminhalt $23{,}382 cm^3$ beträgt?

Aufgaben zu Abschnitt 7. 4. 4. (Der Kegel)

304) Die Grundfläche eines Kreiskegels hat einen Durchmesser von 24 cm. Der Kegel besitzt ein Volumen von $0{,}01\,m^3$. Welche Höhe *h* hat der Kegel?

305) Ein 7,5 m hoher Kreiskegel hat einen Inhalt von $7{,}85\,m^3$.

Wie groß ist der Durchmesser seiner Grundfläche?

306) Die Grundfläche eines Kegelstumpfes hat einen Durchmesser von 60 cm und die Deckfläche einen Durchmesser von 24 cm, seine Höhe beträgt 30 cm.

Wie groß ist der Rauminhalt des Kegelstumpfes?

Wie groß wären der Rauminhalt und die Höhe des ganzen Kegels, wenn nicht seine Spitze abgeschnitten worden wäre?

Zeichne die Abwicklung des Kegelstumpfes im Maßstab 1 : 10!

Aufgaben zu Abschnitt 7. 4. 5. (Die Kugel)

307) Ein kugelförmiger Behälter soll $25\,m^3$ Wasser fassen.

Welchen lichten Durchmesser muß er haben?

308) Eine Kugel aus Eisen (spezifisches Gewicht $= 7{,}45\,kg/dm^3$) hat einen Durchmesser von 22 cm.

Berechne ihr Gewicht!

309) Welchen Durchmesser hat eine Kugel, deren Volumen mit diesem Durchmesser zahlengleich ist?

310) Eine hohle Kugel hat einen Radius von 38 cm und eine Wanddicke von 12 cm. Sie ist aus Blei (spezifisches Gewicht $= 11{,}3\,kg/dm^3$).

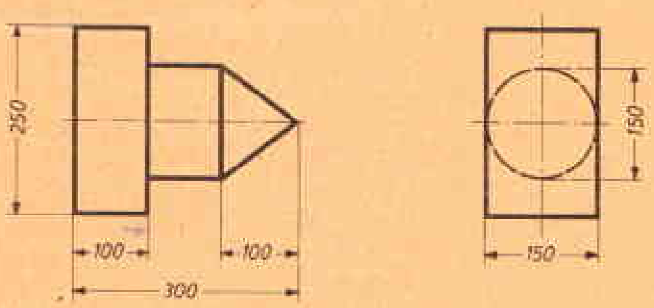
Berechne ihr Gewicht!

Aufgaben zu Abschnitt 7. 4. 6. (Berechnen unregelmäßiger Körper anhand von zwei oder drei Ansichten)

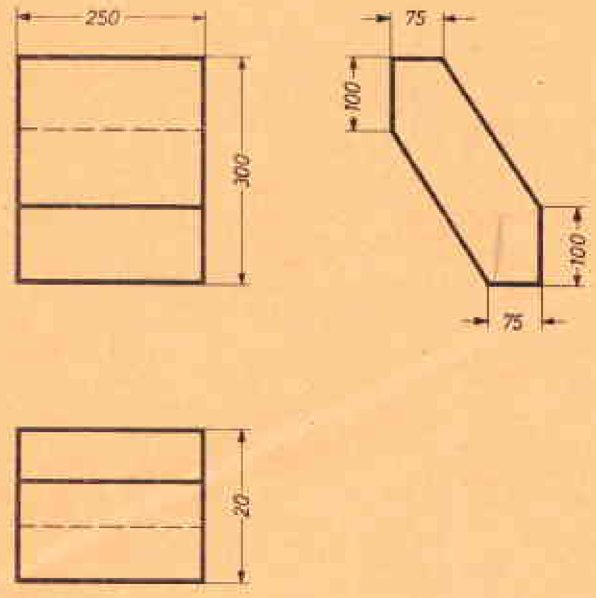
311) Ein zweizügiger Kabelformstein ist 1 m lang und hat eine Höhe von 15 cm und eine Breite von 27 cm. Der Zugdurchmesser beträgt 10 cm.

Wie viele Formsteine können auf einen Lkw von 5 t Tragkraft verladen werden, wenn das Material ein spezifisches Gewicht von $\gamma = 1{,}9\,g/cm^3$ hat?

312) Berechne das Gewicht des gezeichneten Körpers aus Eisen!
$(\gamma = 7{,}8\,kg/dm^3)$



313) Berechne das Gewicht des gezeichneten Körpers aus Messing!
($\gamma = 8{,}4\,g/cm^3$)



Aufgaben zu Abschnitt 8. 1. (Allgemeines über Funktionen)

Stelle die Funktionen graphisch dar, und laß dabei x die Werte von »—5« bis »+5« durchlaufen.

314) $y = x + 4$; $y = x - 4$; $y = 4 - x$.

315) $y = x^2$; $y = (-x)^2$; $y = -(x^2)$.

316) $y = (x - 2)^2$; $y = (x + 3)^2$.

317) $y = 3x$; $y = \frac{1}{5} x^2$.

318) $y = \frac{1}{x}$; $y = \frac{1}{2x}$; $y = \frac{1}{x^2}$.

Aufgaben zu Abschnitt 8. 2. (Der Einheitskreis)

319) Berechne beim Einheitskreis die Bogen b, die den nachfolgend angegebenen Sektorwinkeln α zugeordnet sind!
Gib b in Zahlenwerten **und** in Vielfachen oder in Teilen von π an!

$\alpha_1 = 360°$; $\alpha_2 = 270°$; $\alpha_3 = 180°$;
$\alpha_4 = 90°$; $\alpha_5 = 45°$; $\alpha_6 = 30°$.

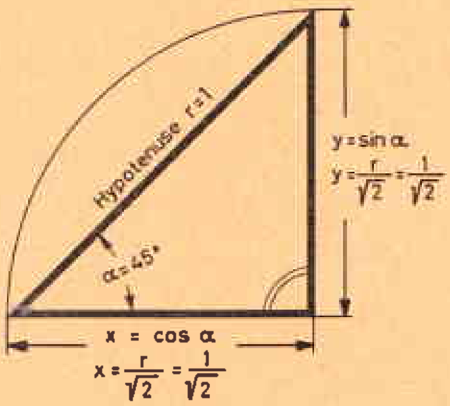
320) Berechne die Sektorwinkel α, über denen im Einheitskreis folgende Bogen geschrieben sind:

$b_1 = 1{,}0467$; $b_2 = 1{,}3956$;
$b_3 = 0{,}628$; $b_4 = 2{,}4422$;
$b_5 = 2\pi$; $b_6 = \frac{3}{2}\pi$;
$b_7 = \frac{15}{8}\pi$; $b_8 = \frac{\pi}{4}$;
$b_9 = \frac{\pi}{2}$; $b_{10} = \frac{4\pi}{3}$.

Aufgaben zu Abschnitt 8. 3. (Die Kreisfunktionen Sinus und Kosinus)

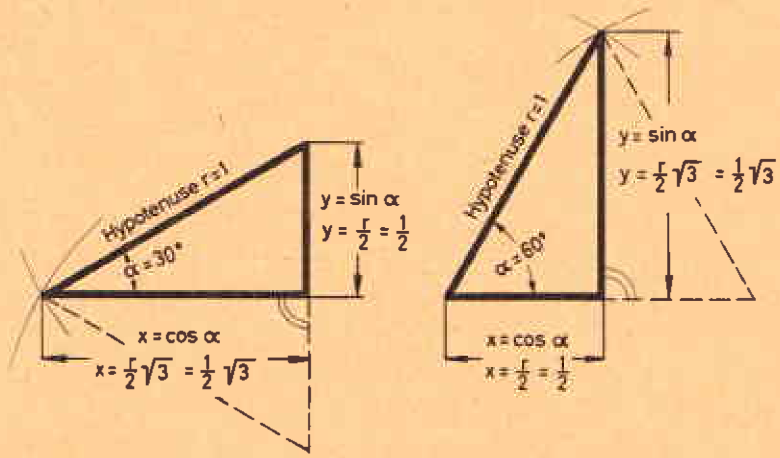
321) Berechne die Funktionswerte *sin* 0°; *sin* 90°; *cos* 0°; *cos* 90°!
Vergleiche die Ergebnisse mit den Werten der Tabelle 3!

322) Berechne anhand untenstehender Abbildung die Funktionswerte *sin* 45° und *cos* 45°!
Vergleiche die Ergebnisse mit den Werten der Tabelle 3!



323) Berechne anhand untenstehender Abbildung die Funktionswerte *sin* 30°; *sin* 60°; *cos* 30°; *cos* 60°!

Vergleiche die Ergebnisse mit den Werten der Tabelle 3!



324) Bestimme die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge 1

a) mit Hilfe der Tabelle 3,

b) mit Hilfe des Pythagoräischen Lehrsatzes!

325) Stelle — ähnlich wie in Abb. 52 — die Funktion $x = \cos\alpha$ dar, wobei α die Winkel von 0° bis 360° durchläuft!

326) Bestimme anhand der Tabelle 3 die Werte $y_1 = \sin\alpha$ bei $\alpha = 0°, 30°, 60° \ldots 360°$. Berechne daraus die Werte $y_2 = 5 \cdot \sin\alpha$ und stelle die Funktion $y_2 = 5 \cdot \sin\alpha$ zeichnerisch dar!

327) Berechne die Gegenkathete a in einem rechtwinkligen Dreieck, wenn $\alpha = 40°$ und die Hypotenuse 12cm ist!

328) In einem rechtwinkligen Dreieck ist $\beta = 20°$ und $b = 12$cm.

Berechne die Seiten a und c sowie den Winkel α!

329) Das Bestimmungsdreieck eines regelmäßigen Sechsecks hat die Höhe $h_a = 4$cm. Berechne den Radius des Umkreises des Sechsecks mit Hilfe der Winkelfunktionen, und bestimme den Flächeninhalt des Sechsecks!

330) Die Grundfläche einer Pyramide ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen größte Seite 7cm mißt. Dieser größten Seite liegt ein Winkel $\alpha = 60°$ an.

Wie groß ist der Rauminhalt der Pyramide, wenn die Pyramidenhöhe 10cm ist?

331) Berechne den Scheinwiderstand Z, wenn der Phasenwinkel $\varphi = 60°$ und der Wirkwiderstand 60Ω beträgt!

Zeichne das Widerstandsdreieck (10Ω $\hat{=}$ 1cm)!

332) Berechne den Phasenwinkel φ und seinen *cos*-Wert, wenn die Wirkleistung $P_w = 86{,}6$ Watt und die Scheinleistung $P_s = 100$VA beträgt!

333) Berechne den Blindwiderstand $X_L = (\omega \cdot L)$ einer Spule, deren Scheinwiderstand $Z = 120\,\Omega$ beträgt und deren induktiver Widerstand $X_L = (\omega \cdot L)$ eine Phasenverschiebung von 30° verursacht.

Aufgaben zu Abschnitt 8. 4. (Die Kreisfunktionen Tangens und Kotangens)

334) Berechne — ähnlich wie bei den Kreisfunktionen Sinus und Kosinus (Aufgaben 321, 322 und 323) — folgende Funktionswerte: $\tan 0°$; $\tan 90°$; $\tan 45°$; $\tan 60°$; $\tan 30°$!

335) Stelle auf Grund der Ergebnisse der Aufgabe 334 die Funktion

$$x = \tan \alpha$$

graphisch dar, wobei der Winkel α von 0° bis 360° läuft!

336) In einem rechtwinkligen Dreieck ist eine Kathete 6cm, die andere Kathete 3,462cm groß. Berechne zuerst die Winkel dieses Dreiecks. Bestimme dann die Größe der Hypotenuse unter Verwendung der 6cm langen Kathete und eines berechneten Winkels!